

В. С. ИМШЕННИК
Ю. И. МОРОЗОВ

РАДИАЦИОННАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

*высоко-
температурных
явлений*

АТОМИЗДАТ

В. С. Имшенник
Ю. И. Морозов

РАДИАЦИОННАЯ
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
ГАЗОДИНАМИКА
ВЫСОКО-
ТЕМПЕРАТУРНЫХ
ЯВЛЕНИЙ

Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. — М.: Атомиздат, 1981. — 88 с.

На основе релятивистски-ковариантных уравнений переноса излучения, в которые входят процессы поглощения и рассеяния фотонов в веществе, выведены различные приближения радиационной релятивистской газодинамики (РРГД): лучистая теплопроводность с локальным термодинамическим равновесием, неравновесные томсоновское когерентное и комптоновское рассеяния фотонов. Получены выражения тензора энергии — импульса излучения. Рассмотрены диффузионные приближения РРГД. Выведены полностью замкнутые нерелятивистские диффузионные уравнения комптоновской радиационной газодинамики, обобщающие обычное приближение лучистой теплопроводности при преобладающей роли процессов рассеяния фотонов.

Для научных работников в области физики высокотемпературной плазмы и релятивистской астрофизики. Может быть использована аспирантами и студентами старших курсов физических факультетов.

Библиогр. 49.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Релятивистские эффекты при движении газа, взаимодействующего с возникающим излучением, играют весьма заметную роль во многих задачах высокотемпературной газодинамики. При исследовании разнообразных физических явлений с высокой плотностью энергии для учета этих эффектов необходимо использовать уравнения радиационной релятивистской газодинамики (РРГД). Здесь можно упомянуть мощные электрические разряды в плазме типа плазменного фокуса, сжатие и нагрев мишеней под воздействием лазерного излучения, релятивистских электронных пучков или пучков высокоэнергичных тяжелых ионов. Для подобных явлений необходим учет таких эффектов, как вклад излучения в перенос импульса, влияние макроскопического движения вещества на радиационный перенос энергии, воздействие различных эффектов взаимодействия излучения с веществом на газодинамические характеристики движения и т. п. Особенно важен учет релятивистских эффектов в ряде проблем астрофизики, таких как распространение сильных ударных волн в оболочках звезд по направлению к поверхности звезды, типичное при гравитационном коллапсе звезд и вспышках сверхновых; высокоскоростные потоки вещества в поверхностных слоях звезд и Солнца типа звездного и солнечного ветра; развитие явлений вспышечной активности Солнца и звезд и т. п.

Детальное и подробное исследование перечисленных проблем с необходимостью затрагивает широкий круг вопросов теоретического характера, требующих основательного представления о способе получения, целесообразности и пределах применимости тех или иных приближений уравнений радиационной газодинамики в релятивистски-ковариантной форме.

Начало изучения радиационного переноса в среде, движущейся с релятивистскими скоростями, положено в классической работе Томаса [1]. Работы [2—6] посвящены различным формам ковариантной формулировки уравнений, полученных Томасом, в рамках специальной теории относительности (СТО). В работе Линдквиста [7] уравнения РРГД получены в общековариантной форме, справедливой для общей теории относительности (ОТО). Характерным для работ этого направления является то, что большинство из них опирается на представление излучения в форме фотонного газа и использование уравнения Больцмана

причем эффекты взаимодействия излучения с веществом рассматриваются феноменологически — в терминах коэффициентов поглощения и рассеяния излучения, эффективной непрозрачности среды и функции источника. Такой подход позволяет связать релятивистски-ковариантное описание эффектов взаимодействия излучения с веществом с хорошо развитым формализмом классической теории переноса. Кроме того, он позволяет для многих практически важных случаев получить эффективные методы решения уравнений, использующие угловые и спектральные моменты интенсивности излучения.

Однако многие аспекты РРГД, имеющие большое значение для высокотемпературных сред, в соответствующей литературе освещены недостаточно полно или недостаточно строго. Особенно это касается учета роли эффектов рассеяния излучения, которые в таких средах являются определяющими для некоторых протекающих процессов. Кроме того, следует отметить несколько усложненный характер получения релятивистски-ковариантных уравнений радиационной газодинамики, опирающейся в некоторых случаях [7] на мало доступный для широкого круга физиков математический аппарат. Между тем, вполне возможен простой и эффективный способ получения уравнений РРГД, использующий широко известные формальные процедуры СТО, который тем не менее позволяет правильно учесть ряд важных эффектов, описываемых в настоящее время на основе специфической тетрадной формулировки ОТО.

Цель настоящей работы — достаточно просто и доступно изложить некоторые сложные проблемы РРГД высокотемпературных явлений и сформулировать уравнения РРГД в ряде практически важных приближений.

ГЛАВА 1

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

При получении уравнений РРГД физически обоснованно исходить из релятивистски-ковариантного уравнения Больцмана. При этом целесообразно не ограничиваться случаем фотонов, а рассмотреть более общий случай произвольных частиц с конечной массой покоя m_0 и любыми квантово-статистическими свойствами. Такая общность позволяет достичь глубокого физического понимания проблем переноса. В основе вывода релятивистски-ковариантного уравнения Больцмана лежит релятивистское обобщение классических представлений фазового пространства и функции распределения частиц, основанное на требованиях ковариантности по отношению к преобразованиям Лоренца. Поскольку такое обобщение произведено во многих работах (см. например [7]) на основе привлечения мало известного специфического математического аппарата, нам представляется необходимым воспроизвести ряд важных результатов в этой области на основе более доступного и более широко известного формализма. При этом мы старались сохранить достаточную общность получаемых результатов и указать на возможности более широкого их применения.

Особенно важно для нас рассмотрение релятивистского уравнения Больцмана для фотонов. Поэтому на каждом этапе случай фотонов оговаривается специально. При этом релятивистское уравнение Больцмана для фотонов не нужно смешивать с известным уравнением переноса излучения [19]. Строго говоря, последнее применяется к распространению фотонного газа (излучения) в неподвижной среде. Релятивистское уравнение Больцмана для фотонов по определению физически корректно учитывает все эффекты движения среды (со сколь угодно большими скоростями и изменениями скоростей) на распространение фотонов. Это уравнение иногда называется уравнением переноса излучения в движущейся среде. Однако не все соотношения данной главы справедливы для неинерциальных систем отсчета. В условиях произвольного движения среды следует использовать неинерциальную (сопутствующую) систему отсчета. Такое обобщение сделано в гл. 4.

§ 1. Общие преобразования Лоренца

Допуская возможность распространения излагаемого подхода как на случай неинерциальных систем отсчета (н. с.), так и на случай учета эффектов гравитации, выберем метрику пространства — времени лабораторной системы отсчета (л. с.) в форме, наиболее часто употребляемой в общей теории относительности (ОТО):

$$ds^2 = - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (d\tau)^2 = \\ = g_{ik} dx^i dx^k, \quad g_{ik} = \text{diag} (-1, -1, -1, +1). \quad (1.1)$$

Здесь ds^2 — интервал между событиями в 4-мерном пространстве — времени; dx^α ($\alpha = 1, 2, 3$) — дифференциалы пространственных координат; $d\tau = cdt$ — приращение координатного времени $dx^4 = dt$, умноженное на скорость света c ; g_{ik} — метрический тензор, имеющий в данной системе отсчета галилееву форму с сигнатурой (-2) . При дальнейшем изложении будем предполагать, что латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, а греческие — от 1 до 3.

Метрику (1.1) удобно, следуя классической работе Паули [20], представить также и в реперной форме на основе введения в каждой точке пространства — времени 4-репера $\{\bar{e}_i\}$, содержащего в качестве ортов три ортонормированных пространственно-подобных вектора $\{\bar{e}_\alpha\} : (\bar{e}_1 \bar{e}_1) = (\bar{e}_2 \bar{e}_2) = (\bar{e}_3 \bar{e}_3) = -1$, $(\bar{e}_\alpha \bar{e}_\gamma) = 0$ ($\alpha \neq \gamma$) и ортогональный им единичный времениподобный вектор $\bar{e}_4 : (\bar{e}_4 \bar{e}_4) = +1$; $(\bar{e}_\alpha \bar{e}_4) = 0$. Произвольный 4-вектор, в том числе и вектор приращения координат $d\bar{x}$, может быть представлен в этом репере через свои (контравариантные) компоненты: $d\bar{x} = dx^i \bar{e}_i$. Тогда (1.1) для интервала можно представить в виде

$$ds^2 = (d\bar{x} d\bar{x}) = (\bar{e}_i \bar{e}_k) dx^i dx^k; \quad g_{ik} = (\bar{e}_i \bar{e}_k).$$

Наряду с 4-репером $\{\bar{e}_i\}$ можно ввести также и взаимный 4-репер $\{\bar{e}^i\}$, чьи орты определяются из соотношений ортогональности $(\bar{e}^i \bar{e}_k) = \delta_k^i$, δ_k^i — символ Кронекера, так что $\bar{e}^\alpha = -\bar{e}_\alpha$; $\bar{e}^4 = \bar{e}_4$. В этом репере 4-вектор $d\bar{x}$ представляется через ковариантные компоненты: $d\bar{x} = dx_i \bar{e}^i$, так что

$$ds^2 = (\bar{e}^i \bar{e}^k) dx_i dx_k = g^{ik} dx_i dx_k,$$

где $g^{ik} = (\bar{e}^i \bar{e}^k) = \text{diag} (-1, -1, -1, +1)$ — контравариантный метрический тензор, а ковариантные компоненты приращений координат связаны с контравариантными соотношениями $dx_\alpha = -dx^\alpha$; $dx_4 = +dx^4$. Аналогичным образом можно представить произвольный 4-вектор $\bar{A}$ через его контравариантные и ковариантные компоненты:

$$\bar{A} = A^i \bar{e}_i = A_k \bar{e}^k; \quad A_\alpha = -A^\alpha; \quad A_4 = A^4.$$

Скалярное произведение двух произвольных 4-векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ запишется следующим образом:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_i \bar{e}^i \cdot B^k \bar{e}_k = A_i B^k \delta_k^i = A_i B^i.$$

Введем единичный 4-вектор макроскопической скорости вещества $\bar{u} = d\bar{x}/ds$ через безразмерный 3-вектор скорости с компонентами $\beta^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. Из формулы (1.1) для интервала получим следующие выражения для компонент $\bar{u}$:

$$u^\alpha = \beta^\alpha \theta; u_\alpha = \beta_\alpha \theta; u^4 = u_4 = \theta; u_i u^i = +1; \theta = (1 - \beta^2)^{-1/2};$$

$$\beta^2 = -\beta_\alpha \beta^\alpha. \quad (1.2)$$

Будем считать, что относительно л. с. с репером $\{\bar{e}_i\}$ и координатами x^i со скоростью $\bar{\beta}$ движется система отсчета, характеризваемая репером $\{\bar{e}_{i0}\}$ и координатами x_{i0}^i , которую мы будем называть собственной. Следует четко представлять различие между собственной системой отсчета (с.с.), в которой скорость вещества равна нулю, вообще говоря, только в одной данной точке, и неинерциальной сопутствующей системой отсчета (н. с. с.), в которой скорость вещества равна нулю в любой ее точке. (Строгое определение сопутствующей системы отсчета приведено в гл. 4.) В ней вещество будет покоиться, по крайней мере, локально и мгновенно, даже если в общем случае $\bar{\beta} = \bar{\beta}(x^i)$. Свяжем изменения в координатах какого-либо события в л. с. с соответствующими изменениями его координат в с.с. Для этого выделим в дифференциалах $d\bar{x}$ компоненты, параллельные скорости $\bar{\beta}$: $dx_{\parallel}^\alpha = A \beta^\alpha$ ($A = \text{const}$), и перпендикулярные ей: $dx_{\perp}^\alpha = dx^\alpha - dx_{\parallel}^\alpha$. Из условия $\beta_\alpha dx_{\perp}^\alpha \equiv 0$ легко получить $\beta_\alpha dx_{\parallel}^\alpha = A \beta_\alpha \beta^\alpha = \beta_\alpha dx^\alpha$, откуда имеем $A = \beta_\gamma dx^\gamma / \beta_\alpha \beta^\alpha = -\beta_\gamma dx^\gamma / \beta^2$. Таким образом, $dx_{\parallel}^\alpha = -\beta^\alpha \beta_\gamma dx^\gamma / \beta^2$, и аналогично этому $(dx_{\parallel}^\alpha)_0 = -\beta^\alpha \beta_\gamma dx_0^\gamma / \beta^2$. Тогда известные формулы связи между дифференциалами координат в л. с. и с. с., даваемые для метрики (1.1) уравнениями Лоренца [20]:

$$dx_{\parallel}^\alpha = \theta [(dx_0^\alpha)_\parallel + \beta^\alpha d\tau_0]; dx_{\perp}^\alpha = (dx_0^\alpha)_\perp; d\tau = \theta (d\tau_0 - \beta_\alpha dx_0^\alpha),$$

примут следующую симметричную форму

$$\left. \begin{aligned} dx^\alpha &= dx_0^\alpha - [(\theta - 1)/\beta^2] \beta^\alpha \beta_\gamma dx_0^\gamma + \beta^\alpha \theta d\tau_0; \\ d\tau &= \theta (d\tau_0 - \beta_\alpha dx_0^\alpha); \\ dx_0^\alpha &= dx^\alpha - [(\theta - 1)/\beta^2] \beta^\alpha \beta_\gamma dx^\gamma - \beta^\alpha \theta d\tau; \\ d\tau_0 &= \theta (d\tau + \beta_\alpha dx^\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Используя введенные выше реперы, эти формулы можно записать в более общей форме. Поскольку один и тот же 4-вектор $d\bar{x}$ можно эквивалентно представить в различных формах:

$\bar{dx} = dx^k \bar{e}_k = dx_0^i \bar{e}_{i0}$, то, скалярно умножая эти равенства поочередно на $\bar{e}_0^m$ и $\bar{e}^m$ и учитывая свойства ортонормированности реперов, получаем следующие соотношения:

$$dx^k = (e_{i0})^k dx_0^i; \quad dx_0^k = (e_0^k)_i dx^i, \quad (1.4)$$

где $(e_{i0})^k = (\bar{e}_{i0} \bar{e}^k)$; $(e_0^k)_i = (\bar{e}_0^k \bar{e}_i)$ — компоненты реперных векторов с. с. $\{\bar{e}_{i0}\}$, $\{\bar{e}_0^i\}$ в реперах $\{e^k\}$, $\{e_k\}$ л. с. соответственно. Сравнивая (1.3) и (1.4), находим для указанных компонент следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} (e_{\nu 0})^\alpha &= (e_0^\alpha)_\nu = \delta_\nu^\alpha - [(\theta - 1)/\beta^2] \beta^\alpha \beta_\nu; \\ (e_{\alpha 0})^4 &= -\beta_\alpha \theta; \quad (e_0^\alpha)_4 = -\beta^\alpha \theta; \\ (e_{40})^\alpha &= \beta^\alpha \theta; \quad (e_0^4)_\alpha = \beta_\alpha \theta; \quad (e_{40})^4 = (e_0^4)_4 = \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Для одномерного движения вдоль оси с ортом $\bar{e}_1$, когда $\beta^1 \equiv \beta$; $\beta_1 = -\beta$, приходим к очень простым выражениям для ненулевых компонент:

$$\left. \begin{aligned} (e_{10})^1 &= (e_0^1)_1 = \theta; \quad (e_{10})^4 = -(e_0^1)_4 = \beta\theta; \quad (e_{20})^2 = (e_0^2)_2 = 1; \\ (e_{30})^3 &= (e_0^3)_3 = 1; \quad (e_{40})^1 = -(e_0^4)_1 = \beta\theta; \quad (e_{40})^4 = (e_0^4)_4 = \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Если подставить выражения (1.6) в (1.4), то получим обычный вид преобразований Лоренца (см., например, [21]).

Формулы (1.4) удобно использовать для представления правил преобразования тензорных величин:

$$\begin{aligned} A^i &= A_0^m (e_{m0})^i; \quad A_0^i = A^m (e_0^i)_m; \quad T_k^i = T_{0n}^m (e_{m0})^i (e_0^n)_k; \quad T_{0k}^i = \\ &= T_n^m (e_0^i)_m (e_{k0})^n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Преобразования (1.4) есть самый общий вид локальных преобразований Лоренца. В такой форме они очень удобны для аналитических вычислений, но их значение гораздо важнее. Дело в том, что если метрика пространства — времени отлична от галилеевой (или псевдодекартовой) формы (1.1), то норма реперных векторов л. с. $\{\bar{e}_i\}$ будет уже отлична от единицы, в результате чего мировые компоненты, т. е. компоненты тензорных величин в репере $\{\bar{e}_i\}$ не могут быть использованы в качестве наблюдаемых. Такими величинами являются физические компоненты, т. е. компоненты величин в ортонормированном репере $\{\bar{e}_{i0}\}$, поскольку реперные векторы могут служить единицами измерения соответствующих компонент. В этом случае уравнения (1.4) служат для перехода от мировых компонент к физическим, а параметры $(e_{i0})^k$, $(e_0^k)_i$ носят название обобщенных параметров Лямэ. Эти параметры лежат в основе так называемой тетрадной формулировки ОТО [21, 22]. Подчеркнем, что использование преобразований Лоренца в общей форме (1.4) позволяет получить результаты, справедливые и для ОТО. В этом случае

эффекты гравитации и неинерциальности повлияют на конкретную форму обобщенных параметров Лямэ $(e_{i0})^k$ и $(e_0^k)_i$, которые в специальной теории относительности (СТО) даются выражениями (1.5) или в частном случае — (1.6).

§ 2. Фазовое пространство

Введенные ранее 4-реперы $\{\bar{e}_i\}$, $\{\bar{e}^i\}$ определяют систему координат в обычном пространстве — времени. Для описания функции распределения частиц (в частности, фотонов) используется импульсно-энергетическое пространство, образующее совместно с обычным пространством — временем фазовое пространство. Введем и в импульсно-энергетическом пространстве соответствующий 4-репер $\{\bar{a}_i\}$, который постараемся определить наиболее удобным образом.

В 4-репере $\{\bar{e}_i\}$ можно ввести 4-вектор $\bar{P}$ энергии — импульса частиц с массой покоя m_0 [7, 16]:

$$\bar{P} = (E/c) \bar{e}_4 + p^\alpha \bar{e}_\alpha = (m_0 c) \bar{u}, \quad (1.8)$$

где $\bar{u}$ — 4-скорость, определенная в (1.2), E — полная энергия частицы ($E = m_0 c^2 \theta$), а p^α — компоненты 3-вектора импульса частицы, связанного с 3-скоростью β^α известными соотношениями $p^\alpha = m_0 c \beta^\alpha \theta$. Для фотонов будем иметь: $m_0 = 0$; $E = h\nu$; $p^\alpha = (h\nu/c) l^\alpha$, где ν — частота кванта; l^α — направляющий вектор фотона. Из определения скалярного произведения, а также из (1.8) следует

$$(\bar{P}\bar{P}) = P_i P^i = (E/c)^2 + p_\alpha p^\alpha = (E/c)^2 - p^2 = (m_0 c)^2. \quad (1.8')$$

Определим 4-репер $\{\bar{a}_i\}$ из условия, что в импульсно-энергетическом пространстве компоненты 4-импульса $\bar{P}$ имеют те же значения, что и в координатном репере $\{\bar{e}_i\}$, т. е. $\bar{P} = (E/c) \bar{a}_4 + p^\alpha \bar{a}_\alpha$ или же, в более удобном для дальнейшего рассмотрения сферическом репере $\{\bar{a}_i\} = \{\bar{a}_p, \bar{a}_\theta, \bar{a}_\phi, \bar{a}_4\}$:

$$\bar{P} = (E/c) \bar{a}_4 + p \bar{a}_p, \quad (1.9)$$

где $\bar{a}_p = (p^\alpha/p) \bar{a}_\alpha$ — единичный пространственно-подобный 4-вектор $[(\bar{a}_p \bar{a}_p) = -1]$ с компонентами $\bar{a}_p^\alpha$, параллельными компонентам 3-импульса p^α . Однако при таком представлении необходимо учитывать, что компоненты 4-импульса $\bar{P}$ уже не являются независимыми, так как все события в импульсно-энергетическом пространстве должны происходить на гиперповерхности $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$. Учет этого обстоятельства уменьшает общую

размерность фазового пространства до семи. Удобнее всего учесть это ограничение, выбрав подходящий 4-репер $\{\bar{b}_i\}$. Поскольку, согласно (1.8), $\bar{P}$ — времениподобный 4-вектор с модулем $m_0 c$, выберем в качестве орта $\bar{b}_4 = \bar{P}/m_0 c$, так что согласно (1.8) $(\bar{b}_4 \bar{b}_4) = +1$. Один из ортогональных ему пространственно-подобных ортов $\bar{b}_1$ выберем в плоскости $(\bar{a}_4, \bar{a}_p)$ таким образом, чтобы выполнялись условия ортонормированности: $(\bar{b}_1 \bar{b}_1) = -1$; $(\bar{b}_1 \bar{b}_4) = 0$. Из этих условий и представления (1.9) 4-вектора $\bar{P}$ через его компоненты вдоль векторов $\bar{a}_4, \bar{a}_p$ получим следующие взаимосвязи между векторами $\bar{b}_1, \bar{b}_4$ и $\bar{a}_p, \bar{a}_4$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_1 &= \left(\frac{p}{m_0 c} \right) \bar{a}_4 + \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right) \bar{a}_p; \quad \bar{b}_4 = \frac{\bar{P}}{m_0 c} = \\ &= \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right) \bar{a}_4 + \left(\frac{p}{m_0 c} \right) \bar{a}_p; \\ \bar{a}_p &= - \left(\frac{p}{m_0 c} \right) \bar{b}_4 + \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right) \bar{b}_1; \quad \bar{a}_4 = \\ &= \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right) \bar{b}_4 - \left(\frac{p}{m_0 c} \right) \bar{b}_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

В качестве остальных двух ортов 4-репера $\{\bar{b}_i\}$ возьмем $b_\theta = a_\theta$; $b_\varphi = a_\varphi$ из сферического 4-репера $\{\bar{a}_i\}$.

Сопоставим выражение для приращения 4-импульса dP_a в сферическом репере, получаемое из (1.9), с эквивалентным ему выражением $d\bar{P}_b$ в репере $\{\bar{b}_i\}$:

$$\left. \begin{aligned} dP_a &= d(E/c) \bar{a}_4 + dp \bar{a}_p + p d\theta_p \bar{a}_\theta + p \sin \theta_p d\varphi_p \bar{a}_\varphi; \\ d\bar{P}_b &= dP_b^4 \bar{b}_4 + dP_b^1 \bar{b}_1 + p d\theta_p \bar{b}_\theta + p \sin \theta_p d\varphi_p \bar{b}_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Используя (1.10) для $\bar{a}_p, \bar{a}_4$, будем иметь для $d\bar{P}_a$ формулу

$$\begin{aligned} d\bar{P}_a &= \left[\frac{E}{c} d\left(\frac{E}{c}\right) - p dp \right] \frac{\bar{b}_4}{m_0 c} + \left[\frac{E}{c} dp - p d\left(\frac{E}{c}\right) \right] \frac{\bar{b}_1}{m_0 c} + \\ &+ p d\theta_p \bar{a}_\theta + p \sin \theta_p d\varphi_p \bar{a}_\varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что благодаря связи (1.8) должно выполняться соотношение $E dE = p dpc^2$, откуда при сравнении с (1.11) находим следующие выражения для компонент dP_b :

$$\begin{aligned} dP_b^4 &= \frac{1}{m_0 c} \left[\frac{E}{c} d\left(\frac{E}{c}\right) - p dp \right] = 0; \quad dP_b^1 = \frac{1}{m_0 c} \left[\frac{E}{c} dp - \right. \\ &\left. - p d\left(\frac{E}{c}\right) \right] = \frac{m_0 c^2}{E} dp = \frac{m_0 c}{p} d\left(\frac{E}{c}\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, использование 4-репера $\{\bar{b}_i\}$ выгодно именно тем, что в нем приращение 4-вектора энергии — импульса частицы $d\bar{P}$ превращается в 3-вектор, определенный на гиперповерхности $E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$, который дается выражениями:

$$\begin{aligned} d\bar{P}_b &= (m_0 c^2/E) dp \bar{b}_1 + d\bar{\Omega}_p = (m_0 c/p) d(E/c) \bar{b}_1 + d\bar{\Omega}_p; \\ d\bar{\Omega}_p &= p d\theta_p \bar{b}_\theta + p \sin \theta_p d\varphi_p \bar{b}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

На основе компонент 4-векторов $d\bar{P}$ и $d\bar{x}$ можно ввести определение элемента фазового объема.

Напомним, что в 3-пространстве объем параллелепипеда, образованного тремя некопланарными 3-векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, определяется следующим псевдоскаляром: $V = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a^\mu b^\nu c^\lambda$ [20, 21]. Здесь $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ — абсолютно антисимметричный псевдотензор Леви — Чивита, имеющий ненулевые компоненты только при всех различных индексах, причем эти компоненты равны $+1$ или -1 в зависимости от того, отличается ли система индексов $(\mu\nu\lambda)$ от (123) четным или нечетным числом перестановок соответственно. Аналогичным образом можно ввести псевдотензор Леви — Чивита ε_{klmn} в 4-мерном пространстве — времени так, что $\varepsilon_{\mu\nu\lambda 4} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}$. Поэтому тот же 3-объем можно записать как $V_4 = \varepsilon_{\mu\nu\lambda 4} a^\mu b^\nu c^\lambda$, т. е. как четвертую компоненту псевдовектора $\bar{V}$ с компонентами $V_n = \varepsilon_{klmn} a^k b^l c^m$. Отметим важную особенность этого псевдовектора: он ортогонален, как это легко проверить, векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $V_n a^n = V_n b^n = V_n c^n = 0$, и в тех случаях, когда эти векторы пространственно-подобны, является времениподобным. Поэтому псевдовектор $\bar{V}$, называемый также ориентированным 3-объемом, можно представить в форме произведения псевдоскаляра V на времениподобный реперный вектор $\bar{e}^4$:

$$\bar{V} = V_4 \bar{e}^4; \quad V = V_4 = \varepsilon_{\mu\nu\lambda 4} a^\mu b^\nu c^\lambda. \quad (1.14)$$

Полагая для обычного пространства — времени $\bar{a} = (dx^1, 0, 0, 0)$; $\bar{b} = (0, dx^2, 0, 0)$; $\bar{c} = (0, 0, dx^3, 0)$, получим из (1.14) для ориентированного элемента 3-объема выражение $d\bar{V}_x = dV_x \bar{e}^4$, где $dV_x = dx^1 dx^2 dx^3$. Аналогичным образом, используя тот факт, что в соответствии с (1.13) в репере $\{\bar{b}_i\}$ приращение 4-импульса $d\bar{P}_b$ является пространственно-подобным вектором, можно положить $\bar{a} = (dP_b^1, 0, 0, 0)$; $\bar{b} = (0, p d\theta_p, 0, 0)$; $\bar{c} = (0, 0, p \sin \theta_p d\varphi_p, 0)$. Тогда из (1.13) и (1.14) с $\bar{b}^4 = \bar{b}_4$ вместо $\bar{e}^4$ найдем для ориентированного элемента 3-объема импульсно-энергетического пространства выражение $d\bar{V}_p = dV_p \bar{b}_4 = dV_p (\bar{P}/m_0 c)$, где

$$\begin{aligned} dV_p &= (m_0 c^2/E) p^2 \sin \theta_p dp d\theta_p d\varphi_p = \\ &= (m_0 c) p \sin \theta_p d(E/c) d\theta_p d\varphi_p. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Элемент фазового объема dW представляет собой скаляр, получающийся при перемножении ориентированных 3-объемов координатного пространства — времени $d\bar{V}_x$ и импульсно-энергетического пространства $d\bar{V}_p$:

$$dW = dV_p dV_x (\bar{P} \bar{e}^4) / m_0 c = p^2 dp d\omega_p dV_x = (pE/c^2) dE d\omega_p dV_x; \\ dG = (g/h^3) dW, \quad (1.16)$$

где $d\omega_p = \sin\theta_p d\theta_p d\varphi_p$ — элемент телесного угла в импульсно-энергетическом пространстве; $(\bar{P} \bar{e}^4) = P^4 = E/c$; dG — число квантовых состояний для частиц с кратностью вырождения g . Формулу (1.16) для элемента фазового объема также получил Линдквист [7] на основе сложного геометрического формализма касательных подпространств. Он подчеркивает особое значение фактора $(\bar{P} \bar{e}^4)$, который делает величину dW не зависящей от ориентации 3-объема $d\bar{V}_x$.

Пусть имеется малая мировая трубка с касательным 4-вектором $\bar{P}$ и dV_x есть объем пространственно-подобного сечения этой трубки в точке $\bar{x}$ с нормалью $\bar{e}^4$ [7]. Если dV_x^* — объем другого сечения в той же точке $\bar{x}$ с нормалью $\bar{e}_*^4$, то выполняется равенство $(\bar{P} \bar{e}^4) dV_x = (\bar{P} \bar{e}_*^4) dV_x^*$. Это же свойство отмечает и Синг [23].

Покажем инвариантность элемента фазового объема dW , определенного соотношением (1.16), относительно преобразований Лоренца. Для этого используем трансформационные свойства частных ориентированных 3-объемов dV_x и dV_p , опираясь на то обстоятельство, что при этих преобразованиях как скалярные, так и псевдоскалярные величины являются инвариантами. Умножив $d\bar{V}_x = dV_x \bar{e}^4$ на произвольный времениподобный 4-вектор $\bar{A}$, найдем следующий инвариант:

$$(d\bar{V}_x \bar{A}) = dV_x A^4 = dV_{x_0} A_0^4 = \text{inv.}$$

Взяв в качестве $\bar{A}$ 4-вектор $\bar{u}$, придем к известной формуле сокращения объемов

$$dV_x = dV_{x_0} / u^4 = dV_{x_0} / \theta = dV_{x_0} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.17)$$

Полагая $\bar{A} = \bar{P}$, получаем связь, которая для частиц с $m_0 \neq 0$ совпадает с (1.17):

$$dV_x = dV_{x_0} (E_0/E). \quad (1.18)$$

Аналогичным образом, умножая $d\bar{V}_p$ на $\bar{P}$, находим также инвариант в следующих эквивалентных формах:

$$(d\bar{V}_p \bar{P}) = (m_0 c)^2 (cp^2/E) dp d\omega_p = (m_0 c)^2 (cp_0^2/E_0) dp_0 d\omega_{p_0} = \text{inv};$$

$$(d\bar{V}_p \bar{P}) = (m_0 c)^2 (p/c) dE d\omega_p = (m_0 c)^2 (p_0/c) dE_0 d\omega_{p_0} = \text{inv}.$$

Таким образом, отсюда можно получить эквивалентные друг другу инвариантные соотношения:

$$\begin{aligned} p^2 dp d\omega_p / E &= p_0^2 dp_0 d\omega_{p_0} / E_0; \\ p dE d\omega_p &= p_0 dE_0 d\omega_{p_0}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Эти соотношения выведены различными авторами на основе самых различных подходов (см., например, [21]).

Из (1.18) и (1.19) следует инвариантность элемента фазового объема $dW = dW_0$, поскольку для (1.16) выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} p^2 dp d\omega_p dV_x &= p_0^2 dp_0 d\omega_{p_0} dV_{x_0}; \\ p E dE d\omega_p dV_x &= p_0 E_0 dE_0 d\omega_{p_0} dV_{x_0}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Связи (1.18)—(1.20) справедливы также и для фотонов ($m_0 = 0$), сводясь в этом случае соответственно к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} v dV_x &= v_0 dV_{x_0}; \quad v dv d\omega_v = v_0 dv_0 d\omega_{v_0}; \quad v^2 dv d\omega_v dV_x = \\ &= v_0^2 dv_0 d\omega_{v_0} dV_{x_0}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

§ 3. Функция распределения частиц

Инвариантная скалярная функция распределения частиц $F(\bar{x}, \bar{P})$ вводится соотношением

$$dN = F(\bar{x}, \bar{P}) dG = F(\bar{x}_0, \bar{P}_0) dG_0, \quad (1.22)$$

где dN — число частиц в мировой точке $\bar{x}$ и с 4-импульсом $\bar{P}$ в элементе объема обычного пространства dV_x и в элементе объема импульсно-энергетического пространства dV_p из (1.15) (т. е. с энергией в интервале от E до $E + dE$ или с импульсом от p до $p + dp$ в телесном угле $d\omega_p$), а $dG = (g/h^3)dW$ — число квантовых состояний в данном элементе фазового объема. Тогда $F(\bar{x}, \bar{P})$ представляет собой число заполнения имеющихся состояний. Таким образом, по формулам (1.16)

$$dN = F(\bar{x}, \bar{P}) (gp^2 dp d\omega_p / h^3) dV_x = F(\bar{x}, \bar{P}) (gp E dE d\omega_p / c^2 h^3) dV_x. \quad (1.23)$$

В классической теории переноса неинвариантная функция распределения частиц $f(\bar{x}, \bar{p})$ вводится, например, из соотношения [7]

$$dN = f(\bar{x}, \bar{p}) (g dE d\omega_p / h^3) dV_x. \quad (1.24)$$

Тогда из сравнения с (1.23) вытекают следующие связи и соответственно свойства преобразования:

$$f = F p E / c^2; \quad F = f c^2 / p E; \quad f / p E = f_0 / p_0 E_0. \quad (1.25)$$

Для фотонов эти же соотношения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} dN_\nu &= F_\nu (g\nu^2/c^3) d\nu d\omega_\nu dV_x; \quad dN_\nu = f_\nu (g/h^2) d\nu d\omega_\nu dV_x; \\ f_\nu &= F_\nu (h^2 \nu^2/c^3); \quad F_\nu = f_\nu (c^3/h^2 \nu^2); \quad f_\nu/\nu^2 = f_{\nu_0}/\nu_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Однако для фотонов чаще используется интенсивность излучения I_ν , определяемая из следующей формулы для скалярного потока энергии dE_ν :

$$dE_\nu = c (h\nu) dN_\nu = I_\nu d\nu d\omega_\nu dV_x; \quad I_\nu = c (h\nu) dN_\nu / d\nu d\omega_\nu dV_x. \quad (1.27)$$

Использование в (1.27) выражений (1.26) для dN_ν дает известные связи и трансформационные свойства [7]:

$$\begin{aligned} I_\nu &= F_\nu gh\nu^3/c^2 = f_\nu gcv/h; \quad F_\nu = I_\nu c^2/gh\nu^3; \quad f_\nu = I_\nu h/gcv; \\ I_\nu/\nu^3 &= I_{\nu_0}/\nu_0^3. \end{aligned} \quad (1.28)$$

§ 4. Релятивистское уравнение Больцмана

Изменение числа рассматриваемых частиц $\delta(dN)$ вследствие соударений друг с другом и с частицами внешней среды в заданном элементе фазового объема сводится (ввиду доказанной ранее инвариантности числа состояний dG в элементе фазового объема) к изменению скалярной функции распределения F :

$$\begin{aligned} \delta(dN) &= \delta [F(\bar{x}, \bar{P}) dG] = [(\partial F/\partial x^i) dx^i + (\partial F/\partial P^i) dP^i] \times \\ &\times dV_p dV_x gP^4/m_0 ch^3. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Это выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta(dN) &= [P^i \partial F/\partial x^i + P^4 (\partial F/\partial P^i) dP^i/d\tau] \times \\ &\times (g/m_0 ch^3) dV_p dV_x d\tau. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В самом деле, поскольку $\beta^\alpha = p^\alpha/P^4 = cp^\alpha/E$ не только для материальных частиц, но и для фотонов (в последнем случае β^α представляет единичный направляющий вектор фотона), то будем иметь $P^4 dx^\alpha = (E/c) (dx^\alpha/d\tau) d\tau = (E/c) \beta^\alpha d\tau = p^\alpha d\tau$; $P^4 dx^4 = P^4 d\tau$, так что получаем $P^4 dx^i = P^i d\tau$, откуда и следует формула (1.30).

Если предполагать все взаимодействия (реакции испускания и поглощения, упругое и неупругое рассеяние) локальными, т. е. исключить все внешние далекодействующие силы, в том числе и гравитационные, и считать, что время пробега частицы между взаимодействиями много больше времени самого взаимодействия, то можно положить $dP^i/d\tau = 0$ и ввести правую часть выражения (1.30) для изменения числа частиц из-за соударений в фазовом объеме $dW = (P^4/m_0 c) dV_p dV_x$ за время $d\tau$ в виде

$(dF/d\tau)|_{\text{ст}} (g/h^3) dW d\tau$. В результате получим из уравнения (1.30) релятивистское уравнение Больцмана в виде

$$P^i \partial F / \partial x^i = P^4 (dF/d\tau)|_{\text{ст}}; \quad l^i \partial F / \partial x^i = (dF/d\tau)|_{\text{ст}}. \quad (1.31)$$

Здесь также введена четырехкомпонентная величина $\bar{l}$ соотношением $\bar{l} = \bar{P}/P^4 = \{l^\alpha; 1\}$, где $l^\alpha = cp^\alpha/E$ — 3-мерный направляющий вектор частицы (введенный в § 2 для фотонов). Отметим, что сама величина $\bar{l}$ не является 4-вектором, так как ее связь с $\bar{l}_0 = \bar{P}_0/P_0^4$, определенной в с. с., определяется не преобразованием Лоренца, а вытекающими из (1.7) соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} l_0^k &= l^i (e_0^k)_i / L; \quad l^k = l_0^i (e_{i0})^k L; \quad \bar{l} = \bar{P}/P^4; \quad \bar{l}_0 = \bar{P}_0/P_0^4; \\ L &= P_0^4/P^4 = l^i (e_0^4)_i = l^i u_i = [l_0^i (e_{i0})^4]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

С помощью (1.5) находим конкретный вид этих выражений:

$$\left. \begin{aligned} l_0^\alpha &= (1/L) \{l^\alpha - [(\theta - 1)/\beta^2] \beta^\alpha \beta_\gamma l^\gamma - \beta^\alpha \theta\}; \\ l^\alpha &= L \{l_0^\alpha - [(\theta - 1)/\beta^2] \beta^\alpha \beta_\gamma l_0^\gamma + \beta^\alpha \theta\}; \\ L &= E_0/E = 1/\theta (1 - \beta_\alpha l_0^\alpha) = \theta (1 + \beta_\alpha l^\alpha); \\ l^4 &= l_0^4 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Из уравнений (1.31) можно вывести уравнения для классической инвариантной функции распределения частиц f , даваемой соотношением (1.25): $l^i \partial f / \partial x^i = (pE/c^2) (dF/d\tau)|_{\text{ст}}$, а также аналогичное уравнение для фотонов и уравнение для интенсивности излучения (1.28):

$$l^i (\partial f_\nu / \partial x^i) = (h^2 \nu^2 / c^3) (dF_\nu / d\tau)|_{\text{ст}}; \quad l^i (\partial I_\nu / \partial x^i) = g (h \nu^3 / c^2) (dF_\nu / d\tau)|_{\text{ст}}. \quad (1.34)$$

При этом переходе величины p, E (или ν) полагаются постоянными.

Уравнение Больцмана (1.31) представляет собой скалярное произведение вектора $\bar{P}$ на градиент функции F , $dF/d\bar{x}$, являющийся ковариантным 4-вектором. Поэтому очевидно, что уравнение (1.31) представляет собой релятивистский инвариант. Подчеркнем также, что градиент $dF/d\bar{x}$ сохраняет свойства ковариантного вектора и в неинерциальных системах отсчета (н. с.), и, следовательно, уравнение (1.31) сохраняет свою форму и для более широкого класса явлений, включающих эффекты неинерциальности движения и гравитации. Если бы вместо градиента фигурировала дивергенция тензора, то соответствующее скалярное произведение векторов уже не сохранило бы свою форму в н. с., ибо по правилам ковариантного дифференцирования у дивергенции тензора были бы отличны от нуля члены, включающие символы Кристоффеля [21]. Поэтому для инерциальной собственной системы отсчета (и. с. с.), введенной в § 1, и также для

неинерциальной сопутствующей системы отсчета (н. с. с.), которая определена в гл. 4, из (1.31) имеем:

$$P_0^i \partial F_0 / \partial x_0^i = P_0^4 (dF_0 / d\tau_0) |_{\text{ст}}; \quad l_0^i \partial F_0 / \partial x_0^i = (dF_0 / d\tau_0) |_{\text{ст}}. \quad (1.35)$$

Важно подчеркнуть вытекающую из сравнения (1.31) и (1.35) связь членов столкновения в л. с. и с.с.:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} &= \left(\frac{P_0^4}{P^4} \right) \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} = \left(\frac{E_0}{E} \right) \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}; \\ \frac{dF_v}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} &= \left(\frac{v_0}{v} \right) \frac{dF_{v_0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} = L \frac{dF_{v_0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Следует заметить, что исходные выражения членов столкновения всегда даются в с. с.

§ 5. Столкновительные члены

Конкретное выражение столкновительных членов через функцию распределения можно записать в довольно общем виде, если принять, что все соударения частиц имеют характер парных взаимодействий. Этот вид столкновительных членов приводится, например, Чиу [24] и Сэмпсоном [5].

Процессы поглощения и рассеяния рассмотрим по отдельности. Соударяющиеся частицы будем считать произвольными релятивистскими, приписывая им только определенные квантостатистические свойства. Начнем с процессов поглощения. Величину изменения числа частиц вследствие поглощения на частицах вида a с функцией распределения F_0^a будем характеризовать на основе функции распределения F_0 .

Процесс поглощения данных частиц частицами вида a может заканчиваться произвольным образом. В парном процессе поглощения могут возникать частицы новых видов. Их квантостатистические свойства будем считать включенными в определение эффективного сечения поглощения σ_0^a .

Обозначим волнистой чертой сверху равновесные термодинамические функции $\tilde{F}_0$ и $\tilde{F}_0^a$.

Пусть частицы вида a всегда находятся в состоянии термодинамического равновесия с температурой T_0 и химическим потенциалом ψ_0^a [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= \{\exp [(E_0 - \psi_0) / kT_0] + \gamma\}^{-1}; \quad F_0^a = \tilde{F}_0^a = \\ &= \{\exp [(E_0^a - \psi_0^a) / kT_0] + \gamma_a\}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

В (1.37) также записана равновесная функция рассматриваемых частиц. Множители γ_a и $\gamma = \pm 1$ соответственно для ферми- и бозе-частиц.

Теперь можно записать окончательно выражение для $dF_0/d\tau_0|_{\text{ст}}$.

$$\begin{aligned} \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}^{(a)} &= \left[(1 - \gamma F_0) \exp\left(\frac{\psi_0 - E_0}{kT_0}\right) - F_0 \right] \int_{(V_{E0}^a)} dV_{E0}^a \times \\ &\times \frac{E_0^a}{c} \frac{v_{\text{отн}}^{a0}}{c} \sigma_0^a \tilde{F}_0^a; \\ dV_{E0}^a &= (g_a/ch^3) p_0^a dE_0^a d\omega_{p_0}^a. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь введены элемент энергетического объема dV_{E0}^a поглощающих частиц a и относительная скорость соударения $v_{\text{отн}}^{a0}$. Удобно представить формулу (1.38) в несколько ином виде, вводя определение линейных коэффициентов поглощения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}^{(a)} &= \alpha'_{E_0} (\tilde{F}_0 - F_0); \quad \alpha'_{E_0} = \alpha_{E_0} \left[1 + \gamma \exp\left(\frac{\psi_0 - E_0}{kT_0}\right) \right], \\ \alpha_{E_0} &= \int_{(V_{E0}^a)} dV_{E0}^a \frac{E_0^a}{c} \frac{v_{\text{отн}}^{a0}}{c} \sigma_0^a \tilde{F}_0^a. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Для фотонов, взаимодействующих с веществом только в процессах поглощения и испускания, выражения (1.39) можно значительно упростить, придав им общеизвестную форму [5, 24]. У фотонов $v_{\text{отн}}^{a0} \equiv c$; $\gamma = -1$, $\psi_0 \equiv 0$; $E_0 = h\nu_0$. Тогда из (1.39) и (1.37) имеем:

$$\left. \begin{aligned} (dF_{\nu_0}/d\tau_0) \Big|_{\text{ст}}^{(a)} &= \alpha'_{\nu_0} (\tilde{F}_{\nu_0}^a - F_{\nu_0}^a); \\ \alpha'_{\nu_0} &= \alpha_{\nu_0} [1 - \exp(-h\nu_0/kT_0)]; \\ \alpha_{\nu_0} &= \int_{(V_{E0}^a)} dV_{E0}^a \frac{E_0^a}{c} \sigma_{\nu_0}^a \tilde{F}_0^a; \\ \tilde{F}_{\nu_0}^a &= [\exp(h\nu_0/kT_0) - 1]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

В ряде важных физических задач удастся значительно продвинуться в их решении, если допустить, что α_{ν_0} не зависит от частоты ν_0 . Тогда $\alpha_{\nu_0} \equiv \alpha_0$, т. е. не зависит от частоты, однако зависит от характеристик внешней среды (в частности, $\sim N_0^a$). Часто этот случай называют приближением «серой материи». Отметим, что при необходимости величину α_{ν_0} нужно просуммировать по всем видам частиц a .

Процессы поглощения и рассеяния частиц, очевидно, происходят независимо и даже могут быть связаны с различными видами частиц внешней среды.

Пусть рассматриваемые частицы упруго рассеиваются на частицах вида s с функцией рассеяния F_0^s .

Как и при рассмотрении процессов поглощения, будем далее считать, что частицы вида s находятся в состоянии термодинамического равновесия. Тогда член рассеяния примет форму, полностью аналогичную выражению (1.38) и представленную в [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{CT}}^{(s)} = & \int_{(V_{E0}^s)} dV_{E0}^s \frac{E_0^s}{c} \frac{v_{\text{отн}}^{s0}}{c} \int_{(\omega_0')} d\omega_0' \sigma_0^s \tilde{F}_0^s (1 - \gamma_s \tilde{F}_0^{s'}) \times \\ & \times \left[-F_0 (1 - \gamma F_0') + F_0' (1 - \gamma F_0) \exp \left(\frac{E_0' - E_0}{kT_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Для фотонов [аналогично (1.38)] из (1.41) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\nu_0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{CT}}^{(s)} = & \int_{(V_{E0}^s)} dV_{E0}^s \frac{E_0^s}{c} \int_{(\omega_0')} d\omega_0' \sigma_{\nu_0}^s \tilde{F}_0^s (1 - \gamma_s F_0^{s'}) \times \\ & \times \left\{ -F_{\nu_0} (1 + F_{\nu_0}') + F_{\nu_0}' (1 + F_{\nu_0}) \exp \left[\frac{h(\nu_0' - \nu_0)}{kT_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

В общем случае рассеяния фотонов на электронах $\gamma_s \equiv 1$ и $\sigma_{\nu_0}^s d\omega_0' dE_0'$ — дифференциальное сечение комптоновского рассеяния, которое дается известной формулой Клейна — Нишины — Тамма [25]. Самым простым случаем является томсоновское рассеяние фотонов ($m_s \equiv m_e \rightarrow \infty$), когда пренебрегается изменением их энергии в процессе соударения:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\nu_0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{CT}}^{(s)} = & N_0^{s*} \int_{(\omega_0')} d\omega_0' \sigma_{\nu_0}^s (F_{\nu_0}' - F_{\nu_0}) = \sigma_T N_0^{s*} \times \\ & \times \left[\frac{1}{4\pi} \int_{(\omega_0')} d\omega_0' \Omega_0(\bar{l}_0', \bar{l}_0) F_{\nu_0}' - F_{\nu_0} \right], \end{aligned} \quad (1.43)$$

где

$$\begin{aligned} N_0^{s*} = & \int_{(V_{E0}^s)} dV_{E0}^s \frac{E_0^s}{c} \tilde{F}_0^s (1 - \tilde{F}_0^s) = \frac{2}{h^3} \int_{(\bar{p}_{e0})} p_{e0}^2 dp_{e0} d\omega_{e0} \times \\ & \times \tilde{F}_0^s (1 - \tilde{F}_0^s), \end{aligned} \quad (1.44)$$

поскольку $\bar{p}_0^{s'} = \bar{p}_0^s$, а следовательно, $\tilde{F}_0^{s'} = \tilde{F}_0^s$. В (1.44) N_0^{s*} — концентрация рассеивающих электронов с поправкой на кванто-

во-статистические свойства в форме множителя $(1 - \tilde{F}_0^s)$. Второй вид столкновительного члена при томсоновском рассеянии в (1.43) получается при введении полного томсоновского сечения $\sigma_T = \int_{(\omega'_0)} \sigma_{v_0}^s d\omega'_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$, где $r_0 = e^2/m_{e0}c^2$, и индикатрисы рассеяния $\Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0)$, зависящей только от направления фотонов $\bar{l}'_0$ и $\bar{l}_0$ с нормировкой $\frac{1}{4\pi} \int_{(\omega'_0)} d\omega'_0 \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) = 1$ [26].

Выражения для столкновительных членов в л. с. можно построить на основе общего трансформационного свойства (1.36), которое согласно (1.32) представляется в виде

$$dF/d\tau|_{\text{ст}} = L dF_0/d\tau_0|_{\text{ст}}, \quad (1.45)$$

где L определен в (1.33). Для процессов поглощения вследствие инвариантности функций $F \equiv F_0$, $\tilde{F} \equiv \tilde{F}_0$ из уравнений (1.37), (1.39) можно получить:

$$\left. \begin{aligned} dF/d\tau|_{\text{ст}}^{(a)} &= \alpha'_E (\tilde{F} - F); \quad \alpha'_E = L\alpha'_{E0} = \\ &= L\alpha_{E0} \{1 + \gamma \exp[(\psi_0 - EL)/kT_0]\}; \\ \tilde{F} &= \{\exp[(EL - \psi_0)/kT_0] + \gamma\}^{-1}; \\ E_0 &= EL; \quad L = \theta(1 + \beta_\alpha l^\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Соответственно в формуле для равновесной функции $\tilde{F}$ в л. с. и в выражении для линейного коэффициента поглощения всюду сделана замена E_0 на E — энергию частиц в л. с. Множитель L тоже согласно (1.33) записан в переменных л. с.

Для фотонов согласно (1.40) и (1.46) имеем:

$$\left. \begin{aligned} dF_\nu/d\tau|_{\text{ст}}^{(a)} &= \alpha'_\nu (\tilde{F}_\nu^a - F_\nu); \\ \alpha'_\nu &= L\alpha'_{\nu_0} = L\alpha_{\nu_0} [1 - \exp(-h\nu L/kT_0)]; \\ \tilde{F}_\nu^a &= [\exp(h\nu L/kT_0) - 1]^{-1}, \quad \nu_0 = \nu L, \\ L &= \theta(1 + \beta_\alpha l^\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

При наличии одних процессов поглощения уравнение Больцмана (1.31) полностью сформулировано, если подставить член $dF/d\tau|_{\text{ст}}$ из (1.46) в (1.31) [для фотонов — из (1.47) в (1.31)].

При наличии только процессов рассеяния нужно повторить аналогичную процедуру трансформации столкновительного члена (1.41) [для фотонов — (1.42)], исходя из (1.45).

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА ИЗЛУЧЕНИЯ. ЛУЧИСТАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ВЯЗКОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

Данная глава посвящена выводу и анализу уравнений релятивистской гидродинамики с излучением*. Самый общий подход в изучении проблем переноса излучения в движущемся газе состоит в использовании релятивистски-ковариантного уравнения Больцмана для функции распределения фотонов с применением законов сохранения энергии и импульса в замкнутой системе (вещество + излучение), а также числа частиц вещества. Для решения конкретных задач такой подход необычайно сложен, гораздо удобнее использовать вместо уравнения Больцмана получаемую на его основе систему уравнений, связывающих различные угловые моменты функции распределения фотонов, к которым, в частности, относятся и компоненты тензора энергии — импульса излучения, входящие в законы сохранения. Значительное упрощение состоит в том, что при таком подходе не требуется знать детального вида функции распределения фотонов, а только некоторые ее усредненные характеристики, представляемые в форме ее моментов различного порядка.

Законы сохранения энергии — импульса для замкнутой физической системы, состоящей из вещества и излучения, дополненные уравнениями моментов излучения, уравнением непрерывности для частиц вещества и уравнениями состояния, образуют полную систему релятивистских уравнений радиационной гидродинамики.

Решение полной системы уравнений представляет сложную задачу, однако в некоторых специальных условиях можно получить для нее приближенные решения, в частности, — найти выражения для компонент тензора энергии — импульса излучения в условиях, близких к локальному термодинамическому равновесию. На основе этих результатов можно сформулировать обобщение известного приближения лучистой теплопроводности в нерелятивистской радиационной гидродинамике. При этом принципиально важно, что часть получающихся результатов является следствием учета эффектов неинерциальности движения вещества. Учет указанных эффектов на формальной основе можно произвести после введения и определения сопутствующей системы отсчета. Однако они могут быть учтены и методами специальной

* Из двух общепринятых (почти равноценных) терминов: гидродинамика и газодинамика мы предпочитаем преимущественно употреблять термин газодинамика, поскольку нас интересует прежде всего теория движения сплошной среды с достаточно высокими макроскопическими скоростями

теории относительности, что и продемонстрировано в этих разделах. Важность такого подхода состоит в том, что он может служить дополнительным обоснованием для адекватного определения неинерциальной сопутствующей системы отсчета (н. с. с.), сделанного в гл. 4.

§ 6. Уравнения моментов функции распределения

Из уравнений (1.19) следует, что энергетический объем $dV_E = (gp/ch^3) dEd\omega_p$, введенный в (1.38), является инвариантом. Отсюда ясно, что величина

$$\left. \begin{aligned} N^i &= \int F P^i dV_E = \frac{g}{ch^3} \int F P^i p dEd\omega_p, \\ \left\{ N^\alpha &= \frac{g}{ch^3} \int F p^\alpha p dEd\omega_p; N^4 = \frac{g}{c^2 h^3} \int F E p dEd\omega_p \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

оказывается 4-вектором, причем N^4 — плотность частиц, поскольку согласно (1.23), $dN = \int F dG$, а $dG = gp E dEd\omega_p dV_x / c^2 h^3 = E dV_E dV_x / c$. Компоненты cN^α , очевидно, являются компонентами 3-вектора плотности потока частиц. В терминах классической функции распределения f из связи (1.25) и по определению 4-х компонентной величины $\bar{l} = \bar{P}/P^4$ 4-вектор N^i записывается в форме $N^i = \frac{g}{h^3} \int f l^i dEd\omega_p$. Интегрирование уравнения Больцмана (1.31) по энергетическому объему dV_E дает релятивистски-ковариантное уравнение непрерывности для частиц в форме

$$\frac{\partial N^i}{\partial x^i} = \frac{g}{ch^3} \int P^4 \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{\text{ст}} p dEd\omega_p. \quad (2.2)$$

В уравнение (2.2), очевидно, входят только процессы, связанные с рождением или исчезновением частиц данного вида, т. е. из правой части уравнения (2.2) выпадают все процессы рассеяния, в том числе и при соударениях частиц с частицами внешней среды. Соотношения для фотонов, следующие из (2.1), (2.2), с учетом (1.28) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} dV_v &= \frac{g}{c^2 h} (v dv d\omega_v); \quad N^\alpha = \frac{g}{c^3} \int F_v l^\alpha v^2 dv d\omega_v = \\ &= \frac{1}{ch} \int \frac{I_v}{v} l^\alpha dv d\omega_v; \\ N^4 &= \frac{g}{c^3} \int F_v v^2 dv d\omega_v = \frac{1}{ch} \int \frac{I_v}{v} dv d\omega_v; \\ \frac{\partial N^i}{\partial x^i} &= \frac{g}{c^3} \int \left. \frac{dF_v}{d\tau} \right|_{\text{ст}} v^2 dv d\omega_v. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Подчеркнем, что при выводе уравнений (2.2) и (2.3) 4-вектор $\bar{P}$ считался не зависящим от координат $\bar{x}$.

Аналогичным образом, умножая функцию F на величину $cP^i P_k$, представляющую собой 4-тензор второго ранга, и производя интегрирование по инвариантному энергетическому объему dV_E , находим компоненты тензора энергии — импульса частиц

$$\begin{aligned} T_k^i &= c \int F P^i P_k dV_E = \frac{g}{h^3} \int F P^i P_k p dE d\omega_p = \\ &= \frac{g}{h^3} \int f l^i l_k E dE d\omega_p. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Умножая уравнение Больцмана (1.31) на cP_k и производя интегрирование по dV_E , получаем уравнение для дивергенции тензора (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^i}{\partial x^i} &= \frac{g}{h^3} \int P^4 \frac{dF}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} P_k p dE d\omega_p = \\ &= \frac{g}{c^2 h^3} \int \frac{dF}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} l_k p E^2 dE d\omega_p = q_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь q_k — релятивистски-ковариантные компоненты 4-вектора обмена энергией — импульсом с частицами внешней среды (при этом в q_k , очевидно, не дают вклада процессы рассеяния частиц данного вида друг с другом).

Компоненты тензора энергии — импульса фотонов W_k^i согласно (2.4) имеют вид:

$$W_k^i = \frac{gh}{c^3} \int F_v l^i l_k v^3 dv d\omega_v = \frac{1}{c} \int I_v l^i l_k dv d\omega_v. \quad (2.6)$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести для компонент этого тензора специальные обозначения:

$$\begin{aligned} J &= W_4^4 = \frac{gh}{c^3} \int F_v v^3 dv d\omega_v = \frac{1}{c} \int I_v dv d\omega_v; \\ S^\alpha &= W_4^\alpha = \frac{gh}{c^3} \int F_v l^\alpha v^3 dv d\omega_v = \frac{1}{c} \int I_v l^\alpha dv d\omega_v; \\ S_\alpha &= W_\alpha^4 = -S^\alpha; \\ K_\gamma^\alpha &= W_\gamma^\alpha = \frac{gh}{c^3} \int F_v l^\alpha l_\gamma v^3 dv d\omega_v = \frac{1}{c} \int I_v l^\alpha l_\gamma dv d\omega_v. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко показать, что J — плотность энергии фотонов, cS^α — плотность потока энергии фотонов, а K_γ^α — тензор радиационных напряжений, в частности, диагональные компоненты этого тен-

зора есть давление излучения. В терминах интенсивности излучения I_ν это, например, показано в работе Томаса [1].

Умножая (1.31) на соответствующие компоненты вектора $\bar{P}$, можно получить уравнения для угловых моментов функции распределения фотонов любого порядка. В частности, уравнения для дивергенции тензора энергии — импульса фотонов, соответствующие уравнениям (2.5), с учетом определений (2.7) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_k^i}{\partial x^i} &= \frac{gh}{c^3} \int \frac{dF_\nu}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} l_k \nu^3 d\nu d\omega_\nu = q_k; \\ \frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} &= \frac{gh}{c^3} \int \frac{dF_\nu}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} \nu^3 d\nu d\omega_\nu = q_4; \\ \frac{\partial S_\alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial K_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} &= \frac{gh}{c^3} \int \frac{dF_\nu}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} l_\alpha \nu^3 d\nu d\omega_\nu = q_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

До сих пор мы рассматривали уравнения моментов функции распределения в л. с., где 4-вектор $\bar{P}$ не зависел от 4-вектора координат $\bar{x}$. Можно построить соответствующие уравнения моментов для уравнения Больцмана (1.35) в н. с. с. В общем случае переменной скорости $\bar{\beta} = \bar{\beta}(\bar{x}_0)$ 4-вектор $\bar{P}_0$ тоже зависит от координат $\bar{x}_0$. В связи с этим уравнения для угловых моментов N_0^i, W_{k0}^i функции $F_{\nu 0}$ получим заведомо более сложными, чем (2.2) и (2.5). Действительно, в н. с. с. мы лишаемся возможности вносить компоненты вектора $\bar{P}_0$ под знаки дифференцирования. Тем не менее такие уравнения можно построить, и этот вопрос рассмотрен в гл. 4, в которой более строго введено определение сопутствующей системы. В и. с. с. на основе уравнения (1.35) вывод уравнений моментов аналогичен приведенному выше.

§ 7. Уравнение радиационной релятивистской газодинамики (РРГД)

Рассмотрим замкнутую физическую систему, состоящую из вещества и излучения. Вещество можно представить сколь угодно сложным составом как смесь газов из различных видов частиц, находящихся в состоянии термодинамического равновесия. Излучение, напротив, представляет собой неравновесный фотонный газ, взаимодействующий в процессах поглощения, рождения и рассеяния фотонов с частицами вещества. Вещество может находиться в произвольном движении, описываемом релятивистским 3-вектором скорости $\bar{\beta}(\bar{x})$, зависящим от координат $\bar{x}$. Тогда проблема сводится к построению уравнений РРГД. Основой этих уравнений, как известно [21], являются законы сохранения

энергии — импульса всей замкнутой физической системы, справедливые в любой и. с.:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (T_k^i + W_k^i) = 0, \quad (2.9)$$

где T_k^i — тензор энергии — импульса вещества, а W_k^i — тензор энергии — импульса излучения из (2.4) и (2.7) соответственно. Основываясь на выводах § 6 [см. (2.8)], можно записать (2.9) в альтернативном виде:

$$\left. \begin{aligned} \partial W_k^i / \partial x^i &= q_k; \quad \partial T_k^i / \partial x^i = -q_k, \\ q_k &= \frac{gh}{c^3} \int \frac{dF_v}{d\tau} \Big|_{\text{ст}} l_k v^3 dv d\omega_p. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Для вещества ограничимся далее случаем идеальной среды, которая, в частности, может быть смесью газов различных частиц. Тогда тензор

$$T_k^i = (\varepsilon_0 + p_0) u^i u_k - p_0 \delta_k^i, \quad (2.11)$$

где p_0 , ε_0 — скалярное давление и плотность внутренней энергии, определенные в с. с. В самом деле, тензор T_k^i согласно определению (2.4) и смыслу величин $\bar{l}$ [соответственно 4-вектора $\bar{P}$ из (1.8)] должен иметь в с. с. следующий вид: $T_k^i = \text{diag}(-p_0, -p_0, -p_0, \varepsilon_0)$. Тогда в л. с. он однозначно определяется формулой (2.11), которую можно вывести формально при помощи общих соотношений (1.5), (1.7). Запишем еще закон сохранения числа частиц (точнее, числа барионов) как частный случай уравнения непрерывности (2.2) с равным нулю членом рождения и исчезновения частиц:

$$\partial (\rho_0 u^i) / \partial x^i = 0. \quad (2.12)$$

Здесь ρ_0 — плотность вещества в с.с.; $\rho_0 = N_0^n m_p$, где N_0^n — плотность нуклонов; m_p — масса протона, но в принципе вместо m_p здесь может фигурировать любая постоянная величина размерности массы, например, эффективная масса.

Подставляя в (2.9) выражение для тензора вещества T_k^i из (2.11) и используя уравнение (2.12) и обозначения (2.7), получаем релятивистски-ковариантные уравнения движения и уравнение энтропии:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \theta \frac{d}{d\tau} \left(\beta_\alpha \theta \frac{\varepsilon_0 + p_0}{\rho_0} \right) &= \frac{\partial p_0}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial K_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial S_\alpha}{\partial \tau}, \\ \rho_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \right) + \rho_0 p_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) &= \\ &= - \frac{\partial J}{\partial \tau} - \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} - \beta^\alpha \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial K_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где дифференциальный оператор $d/d\tau = \partial/\partial\tau + \beta^\alpha \partial/\partial x^\alpha$ имеет обычный смысл субстанциональной производной. Полученная таким образом полная система уравнений составляет систему уравнений РРГД.

В заключение этого параграфа приведем систему уравнений (2.10), (2.13) в важном для приложений сферически-симметричном одномерном случае. Еще раз подчеркнем, что полная система уравнений может включать помимо этого некоторые дополнительные дифференциальные уравнения (см., например, гл. 5).

Обозначим

$$l^1 = l^r = -l_r; \quad q^1 = q^r = -q_r;$$

$$N = N^4; \quad H = N^1 = N^r; \quad S = S^1 = S^r = -S_r; \quad K = -K_r.$$

В результате использования этих обозначений для уравнений (2.3) и (2.8) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2H}{r} &= \frac{g}{c^3} \int \frac{dF_v}{d\tau} \Big|_{\text{CT}} v^2 dv d\omega_v; \\ \frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{2S}{r} &= q^4 = \frac{gh}{c^3} \int \frac{dF_v}{d\tau} \Big|_{\text{CT}} v^3 dv d\omega_v; \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{J-3K}{r} &= q^1 = \frac{gh}{c^3} \int \frac{\partial F_v}{\partial \tau} \Big|_{\text{CT}} l^1 v^3 dv d\omega_v. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Теперь, учитывая, что правые части уравнений (2.13) в соответствии с (2.10) равны $\partial p_0/\partial x^\alpha - q_\alpha = \partial p_0/\partial x^\alpha + q^\alpha$ и $-q^4 - \beta^\alpha q_\alpha$, запишем их в тех же обозначениях для сферически-симметричного случая, используя компоненты q^1 и q^4 из (2.14)

$$\begin{aligned} -\rho_0 \theta \frac{d}{d\tau} \left(\beta \theta \frac{\varepsilon_0 + p_0}{\rho_0} \right) &= \frac{\partial p_0}{\partial r} + \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{J-3K}{r} \right); \\ \rho_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \right) + \rho_0 p_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) &= - \left(\frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2S}{r} \right) - \beta \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{J-3K}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь, как обычно, $\beta = \beta^r = -\beta_r$, а $d/d\tau = \partial/\partial\tau + \beta \partial/\partial r$. В правых частях уравнений (2.15) стоят выражения $\partial p_0/\partial r + q^1$ и $-q^4 + \beta q^1$ из (2.14). Совместное решение уравнений (2.14) и (2.15) (вместе с необходимыми дополнительными уравнениями) является задачей РРГД в сферически-симметричном случае.

§ 8. Тензор энергии — импульса излучения при условиях, близких к равновесным, в собственной системе отсчета (с.с.)

В условиях, близких к равновесным, можно вычислить компоненты тензора энергии — импульса излучения методом последовательных приближений непосредственно из уравнения Больцмана (1.31). Если при этом ограничиться вторым приближением, т. е. учесть только члены, линейные по производным гидродинамических и термодинамических величин, то можно прийти к обобщению хорошо известного приближения лучистой теплопроводности с введением средней величины пробега фотонов по Росселанду [29, 30].

Основываясь на формулах гл. 1 для преобразования различных тензорных величин, мы получим тензор энергии — импульса излучения в л. с. исходя из его компонент в и.с.с., несравненно более простых для непосредственного вычисления. Тем не менее, при этом вычислении нам фактически придется учесть эффекты неинерциальности движения вещества. Более строго и формально эти эффекты учитываются при использовании н. с. с., что возможно только при развитии необходимого математического аппарата (гл. 4). Поэтому мы считаем весьма полезным привести здесь вычисление тензора энергии — импульса, основанное только на результатах гл. 1 и некоторых элементарных физических соображениях, на основе которых можно учесть эффекты неинерциальности методами СТО. Для простоты ограничимся учетом процессов поглощения фотонов, но с произвольной зависимостью коэффициента поглощения от частоты фотонов. Учет процессов рассеяния фотонов отложим до гл. 4.

Из уравнения Больцмана (1.35) для с.с. и столкновительного члена вида (1.40) получим исходное уравнение в форме

$$P_0^{*i} \partial F_{\nu 0}^* / \partial x_0^{*i} = P_0^{*4} \alpha'_{\nu 0} (\tilde{F}_{\nu 0}^{a*} - F_{\nu 0}^*); \quad \tilde{F}_{\nu 0}^{a*} = [\exp(h\nu_0^*/kT_0) - 1]^{-1}. \quad (2.16)$$

Как уже указывалось в § 4 при выводе релятивистского уравнения Больцмана (1.31), оно справедливо также и для н.с.с. Символ «*» обозначает принадлежность величин к сопутствующей с. о. Перепишав уравнение (2.16) в несколько иной форме: $F_{\nu 0}^* = \tilde{F}_{\nu 0}^{a*} - (l_0^{*i} / \alpha'_{\nu 0}) \partial F_{\nu 0}^* / \partial x_0^{*i}$, используем его для получения второго приближения к функции распределения, что естественно сделать в близких к равновесным условиях:

$$F_{\nu 0}^* \approx \tilde{F}_{\nu 0}^{a*} - (l_0^{*i} / \alpha'_{\nu 0}) \partial \tilde{F}_{\nu 0}^{a*} / \partial x_0^{*i}. \quad (2.17)$$

Наряду с н. с. с. введем и. с. с., в которой фиксируем значения частоты фотонов ν_0 и направляющего вектора $\bar{l}_0$. За знаками дифференциала $\partial / \partial x_0^{*i}$ величины ν_0^* и $\bar{l}_0^*$ совпадают с соответствующими величинами ν_0 и $\bar{l}_0$, но в формуле (2.17) они должны

дифференцироваться с учетом соотношения (1.33) для $E_0^* = h\nu_0^*$. Поэтому (2.17) с учетом вида $\tilde{F}_{\nu 0}^{a*}$ переписывается следующим образом:

$$F_{\nu 0}^* = \tilde{F}_{\nu 0}^{a*} - \frac{1}{\alpha'_{\nu 0}} \frac{\partial \tilde{F}_{\nu 0}^{a*}}{\partial T_0} \left[l_0^{*i} \frac{\partial T_0}{\partial x_0^{*i}} - \left(\frac{T_0}{\nu_0} \right) l_0^{*i} \frac{\partial \nu_0^*}{\partial x_0^{*i}} \right]. \quad (2.18)$$

Отметим, что в выводе (2.17) можно было бы обойтись и без введения н. с. с. В самом деле, будем исходить из уравнения Больцмана (1.35), записанного для и. с. с. Тогда в качестве столкновительного члена мы должны воспользоваться его общим выражением из (1.47), где скорость вещества уже отлична от нуля во всех точках за исключением данной:

$$\left. \begin{aligned} l_0^i \partial F_{\nu 0} / \partial x_0^i &= dF_{\nu 0} / d\tau_0|_{\text{ст}} = L_0 \alpha'_{\nu 0} (\tilde{F}_{\nu 0}^a - F_{\nu 0}), \\ L_0 &= \theta (1 + \beta_{0\alpha} l_0^\alpha), \\ \tilde{F}_{\nu 0}^a &= [\exp(h\nu_0 L_0 / kT_0) - 1]^{-1}, \quad \nu_0^* = \nu_0 L_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Фиксируя частоту ν_0 и вектор направлений l_0^i в и. с. с. как и раньше, получаем методом последовательных приближений функцию

$$F_{\nu 0} = \tilde{F}_{\nu 0}^a - (l_0^i / L_0 \alpha'_{\nu 0}) \partial \tilde{F}_{\nu 0}^a / \partial x_0^i, \quad (2.20)$$

тождественно совпадающую с полученной выше: $F_{\nu 0}^* = F_{\nu 0}$ при учете, что в данной точке $\beta_{0\alpha} = \beta_{\alpha 0} \equiv 0$; $\nu_0^* = \nu_0$; $\bar{l}_0^* = \bar{l}_0$; $L_0 = 1$ и $\tilde{F}_{\nu 0}^{a*} = \tilde{F}_{\nu 0}^a$ всюду за исключением случая, когда $\tilde{F}_{\nu 0}^{a*}$ находится под знаком дифференцирования. Все дальнейшие результаты для собственной и сопутствующей системы отсчета совпадают, поскольку преобразование Лоренца (1.4) ничем не отличается в данной точке для обеих этих систем отсчета. Поэтому в дальнейшем опустим символ «*» всюду вне знаков дифференцирования и в самом дифференциальном операторе. Мы уделяем повторению вывода формул $F_{\nu 0}^*$ и $F_{\nu 0}$ особое внимание из-за важности ясного понимания свойства обеих — инерциальной и неинерциальной — с. с. Чтобы в дальнейшем использовать общепринятые обозначения, перейдем в обычное трехмерное пространство с метрикой $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, +1, +1)$, в котором направляющий 3-вектор $\bar{l}_0$ имеет положительную единичную норму, а скалярное произведение двух 3-векторов $(\bar{a}\bar{b})$ определено обычным образом — через контравариантные компоненты. При этом произведение $(\beta_\alpha l^\alpha)$ должно быть записано в виде $-(\bar{\beta} \bar{l})$. Тогда связь между частотами и направляющими векторами в обеих с.с. из (1.33) символически записывается в виде

$$\nu_0^* = \nu_0 L_0; \quad L_0 = [1 - (\bar{\beta}_0 \bar{l}_0)] / \sqrt{1 - \beta_0^2}. \quad (2.21)$$

Так выглядят выражения ν_0^* и L_0 до операции дифференцирования. После дифференцирования надо принять $\nu_0^* = \nu_0$; $\bar{l}_0^* = \bar{l}_0$; $L_0 = 1$, поскольку в данной точке $\bar{\beta}_0 \equiv 0$. Отсюда следует, что при дифференцировании ν_0^* с учетом (2.21)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + (\bar{l}_0 \bar{\nabla}_0) \right] \nu_0^* = -\nu_0 \left(\bar{l}_0 \left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + (\bar{l}_0 \bar{\nabla}_0) \right] \bar{\beta}_0 \right). \quad (2.22)$$

Подставив (2.22) в (2.18) и введя функцию Планка $B_{\nu_0} = (gh\nu_0^3/c^2) \tilde{F}_{\nu_0}^a$, с учетом (1.28) и того, что $I_{\nu_0}^* = I_{\nu_0}$ получим спектральную интенсивность излучения в форме

$$I_{\nu_0} = B_{\nu_0} - \frac{1}{\alpha'_{\nu_0}} \frac{\partial B_{\nu_0}}{\partial T_0} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + (\bar{l}_0 \bar{\nabla}_0) \right] T_0 + \right. \\ \left. + T_0 \left(\bar{l}_0 \left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + (\bar{l}_0 \bar{\nabla}_0) \right] \bar{\beta}_0 \right) \right\}. \quad (2.23)$$

Интегрирование (2.23) по частоте ν_0 приводит к следующему выражению для интегральной интенсивности излучения

$$I_0 = \int_0^\infty I_{\nu_0} d\nu_0:$$

$$I_0 = B_0 - \frac{1}{\alpha_R} \frac{\partial B_0}{\partial T_0} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + (\bar{l}_0 \bar{\nabla}_0) \right] T_0 + \right. \\ \left. + T_0 \left(\bar{l}_0 \left[\frac{\partial}{\partial \tau_0} + (\bar{l}_0 \bar{\nabla}_0) \right] \bar{\beta}_0 \right) \right\}; \quad (2.24)$$

$$B_0 = \int_0^\infty B_{\nu_0} d\nu_0 = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T_0^4 = \frac{ac}{4\pi} T_0^4,$$

в которое вошла величина среднего пробега фотонов по Росселанду:

$$\frac{1}{\alpha_R} = \left(\int_0^\infty \frac{1}{\alpha'_{\nu_0}} \frac{\partial B_{\nu_0}}{\partial T_0} d\nu_0 \right) \left(\int_0^\infty \frac{\partial B_{\nu_0}}{\partial T_0} d\nu_0 \right)^{-1}. \quad (2.25)$$

Для получения тензора энергии — импульса излучения в с.с. остается произвести интегрирование выражения (2.24) по телесному углу $d\omega_{\nu_0}$ согласно формулам (2.7). Элементарное, хотя и довольно трудоемкое интегрирование, приводит к компонентам симметричного тензора энергии — импульса W_{ik}^0 (они равны, очевидно, контравариантным компонентам W_0^{ik} в ковариантных обозначениях):

$$\begin{aligned}
J_0 &= W_{44}^0 = \frac{1}{c} \int I_0 d\omega_{v0} = B_0^* - \frac{1}{\alpha_R} \frac{\partial B_0^*}{\partial T_0} \left[\frac{\partial T_0}{\partial \tau_0} + \right. \\
&+ \left. \frac{T_0}{3} (\bar{\nabla}_0 \bar{\beta}_0) \right]; \\
S_{\alpha_0} &= W_{\alpha_4}^0 = W_{4\alpha}^0 = \frac{1}{c} \int I_0 l_{0\alpha} d\omega_{v0} = -\frac{1}{3\alpha_R} \frac{\partial B_0^*}{\partial T_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial x_{0\alpha}} + \right. \\
&+ \left. T_0 \frac{\partial \beta_{0\alpha}}{\partial \tau_0} \right); \\
K_{\alpha\gamma}^0 &= W_{\alpha\gamma}^0 = \frac{1}{c} \int I_0 l_{0\alpha} l_{0\gamma} d\omega_{v0} = \frac{B_0^*}{3} \delta_{\alpha\gamma} - \frac{1}{3\alpha_R} \frac{\partial B_0^*}{\partial T_0} \times \\
&\times \left\{ \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial \tau_0} + \frac{T_0}{5} \left[\frac{\partial \beta_{0\alpha}}{\partial x_{0\gamma}} + \frac{\partial \beta_{0\gamma}}{\partial x_{0\alpha}} + \delta_{\alpha\gamma} (\bar{\nabla}_0 \bar{\beta}_0) \right] \right\}, B_0^* = \\
&= \frac{4\pi}{c} B_0 = aT_0^4.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

В формулы (2.24) входит обычная дивергенция вектора скорости $\bar{\beta}_0$ и диагональный 3-тензор $\delta_{\alpha\gamma}$. Для интегрирования выражений (2.26) можно воспользоваться некоторым общим формализмом, приведенным в работе [13]. Согласно этому формализму, можно вычислить любые интегралы по нормированному телесному углу $d\bar{l}_0 = d\omega_{v0}/4\pi$, включающие в себя скалярные произведения произвольных постоянных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и т. д. на единичный вектор направления $\bar{l}_0$.

§ 9. Тензор энергии — импульса излучения при условиях, близких к равновесным, в лабораторной системе отсчета (л. с.)

Компоненты симметричного тензора энергии — импульса в л. с. можно получить на основе тензорных преобразований (1.4) с компонентами матрицы Лоренца (1.5):

$$W_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} W_{lm}^0; \quad \|\alpha_{ik}\| = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{\theta-1}{\beta^2} \beta_\alpha \beta_\gamma; & \theta \beta_\alpha \\ \theta \beta_\gamma; & \theta. \end{array} \right\|. \tag{2.27}$$

Чтобы переход в л. с. был полностью завершен, необходимо выразить компоненты W_{ik}^0 из (2.26) через координаты и 3-скорости в этой системе отсчета. Для такого перехода следует, во-первых, воспользоваться трансформационными свойствами дифференциальных операторов $\partial/\partial\tau$ и ∇ . Согласно преобразованию прира-

щений вектора $d\bar{x}$ (1.4), которое, как уже было сказано, применимо по отношению к н.с.с.:

$$\frac{\partial}{\partial x_0^i} = \left(\frac{\partial x^m}{\partial x_0^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} = (e_{i0})^m \frac{\partial}{\partial x^m}; \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = (e_0^m)_i \frac{\partial}{\partial x_0^m}, \quad (2.28)$$

а отсюда в соответствии с (1.5), где даны $(e_{i0})^m$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0^4} = (e_{40})^k \frac{\partial}{\partial x^k} = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \theta \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + (\bar{\beta} \bar{\nabla}) \right] = \\ &= \theta \frac{d}{d\tau}; \\ \nabla_{0\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_0^\alpha} = (e_{\alpha 0})^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (e_{\alpha 0})^4 \frac{\partial}{\partial \tau} + (e_{\alpha 0})^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} = \\ &= \nabla_\alpha + \frac{\theta-1}{\beta^2} \beta_\alpha (\bar{\beta} \bar{\nabla}) + \beta_\alpha \theta \frac{\partial}{\partial \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Во-вторых, следует использовать релятивистский закон сложения скоростей в известной трехмерной векторной форме, также вытекающий из соотношений (1.4) и (1.5). Этот закон здесь нужно применить для связи скоростей в двух и.с.с.: собственной и лабораторной, на основе которой получается связь между ускорениями вещества в этих системах отсчета. Обозначим скорость л. с. относительно с. с. $\bar{\beta}^0$, имея в виду локальную и мгновенную скорости рассматриваемой мировой точки $\bar{x}$. Тогда по закону сложения скоростей с $\theta^0 = (1 - \beta^{02})^{-1/2}$

$$\bar{\beta}_0 = \frac{1}{\theta^0 [1 - (\bar{\beta} \bar{\beta}^0)]} \left[\bar{\beta} + \frac{(\theta^0 - 1) \bar{\beta}^0}{(\beta^0)^2} (\bar{\beta} \bar{\beta}^0) - \theta^0 \bar{\beta}^0 \right]. \quad (2.30)$$

Как видно из (2.30), при $\bar{\beta}^0 = \bar{\beta}$ имеем $\beta_0 = 0$, что и следует ожидать. Действие любого дифференциального оператора D на величину $\bar{\beta}_0$ сводится к действию только на величину $\bar{\beta}$, и после дифференцирования всюду следует произвести замену $\bar{\beta}^0 = \bar{\beta}$. Запишем это в явной форме, используя выражение (2.30):

$$\begin{aligned} D\bar{\beta}_0 &= \left[D\bar{\beta} + \frac{(\theta^0 - 1) \bar{\beta}^0}{(\beta^0)^2} (\bar{\beta}^0 D\bar{\beta}) \right] \frac{1}{\theta^0 [1 - (\bar{\beta} \bar{\beta}^0)]} + \\ &+ \frac{(\bar{\beta}^0 D\bar{\beta})}{\theta^0 [1 - (\bar{\beta} \bar{\beta}^0)]^2} \left[\bar{\beta} + \frac{(\theta^0 - 1) \bar{\beta}^0}{(\beta^0)^2} (\bar{\beta} \bar{\beta}^0) - \theta^0 \bar{\beta}^0 \right] = \\ &= \theta \left[D\bar{\beta} + \frac{(\theta - 1) \bar{\beta}}{\beta^2} (\bar{\beta} D\bar{\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

При помощи соотношений (2.29) и (2.31), примененных в указанной последовательности к компонентам W_{ik}^0 из (2.27), и после

подстановки полученных таким образом выражений в соотношения (2.29), мы получим компоненты искомого тензора W_{ik} .

Разделим эту задачу на два этапа. Сначала вычислим тензор W_{ik} в первом приближении, $W_{ik}^{(1)}$, пренебрегая, в W_{ik}^0 дифференциальными членами второго приближения. Тогда, применив формулы (2.27) к диагональному тензору в с.с. из (2.26)

$$W_{ik}^{0(1)} = \left\| \begin{array}{cc} (B_0^*/3) \delta_{\alpha\gamma}; & 0 \\ 0; & B_0^* \end{array} \right\|, \quad (2.32)$$

мы получим для соответствующего тензора в л. с.:

$$W_{ik}^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} (B_0^*/3) [\delta_{\alpha\gamma} + 4\beta_\alpha \beta_\gamma / (1 - \beta^2)]; & (4B_0^*/3) \beta_\alpha / (1 - \beta^2) \\ (4B_0^*/3) \beta_\gamma / (1 - \beta^2); & (B_0^*/3) (3 + \beta^2) / (1 - \beta^2) \end{array} \right\| \quad (2.33)$$

В галилеевском случае, когда пренебрегаем членами $\sim \beta^2$, подстановка $W_{ik}^{(1)}$ из (2.33) в общие законы сохранения (2.13) с учетом соотношений (2.7) о связи $K_\alpha^\gamma = -W_{\alpha\gamma}^{(1)}$;

$$S_\alpha = -S^\alpha = -W_{\alpha 4}^{(1)} = -W_{4\alpha}^{(1)}; J = W_{44}^{(1)}$$

и перехода к обычным обозначениям дает знакомые простые уравнения с давлением и внутренней энергией равновесного излучения:

$$\left. \begin{aligned} p_0^{(r)} &= B_0^*/3 = aT_0^4/3; \quad \varepsilon_0^{(r)} = B_0^* = aT_0^4; \\ \rho_0 \frac{dv_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p_0 + p_0^{(r)}); \quad \rho_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{(r)}}{\rho_0} \right) + \\ &+ \rho_0 (p_0 + p_0^{(r)}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

При этом пренебрегаем членами $\sim \beta^2$ не только в выражении (2.33), но и непосредственно в (2.13), а именно пренебрегаем $\partial S_\alpha / \partial \tau$ по сравнению с $\partial K_\alpha^\gamma / \partial x^\gamma$. Этот член, вообще говоря, тоже $\sim \beta^2$ по сравнению с $\partial K_\alpha^\gamma / \partial x^\gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\alpha}{\partial \tau} &= -\frac{\partial W_{\alpha 4}^{(1)}}{\partial \tau} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4}{3} \beta_\alpha B_0^* \right); \quad \frac{\partial K_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} = \\ &= -\frac{\partial W_{\alpha\gamma}^{(1)}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{B_0^*}{3} \right); \end{aligned}$$

характерное гидродинамическое время $t_\Gamma \sim x_\Gamma / v_\alpha$ (x_Γ — характерная гидродинамическая длина), так что

$$\partial S_\alpha / \partial \tau : \partial K_\alpha^\gamma / \partial x^\gamma \sim (v_\alpha / c) \beta_\alpha \approx \beta^2.$$

При сохранении всех членов (2.33) и (2.13), мы, очевидно, получаем обобщение идеальной релятивистской гидродинамики вещества благодаря учету вклада равновесного излучения—идеальную релятивистскую гидродинамику с излучением.

Теперь рассмотрим преобразование (2.27) для членов второго приближения тензора W_{ik}^0 , которое аддитивно прибавляется к членам первого приближения. Согласно (2.26), обозначив $A = - (1/3\alpha_R)\partial B_0^*/\partial T_0$, запишем $W_{ik}^{0(2)}$ следующим образом:

$$W_{\alpha\gamma}^{0(2)} = A \left\{ \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{3} \frac{\partial T_0}{\partial \tau} + \frac{T_0}{15} \left[\frac{\partial \beta_{0\alpha}}{\partial x_{0\gamma}} + \frac{\partial \beta_{0\gamma}}{\partial x_{0\alpha}} + \delta_{\alpha\gamma} (\bar{V}_0 \bar{\beta}_0) \right] \right\};$$

$$W_{\alpha 4}^{0(2)} = W_{4\alpha}^{0(2)} = \frac{A}{3} \left(\frac{\partial T_0}{\partial x_{0\alpha}} + T_0 \frac{\partial \beta_{0\alpha}}{\partial \tau_0} \right); \quad (2.35)$$

$$W_{44}^{0(2)} = A \frac{\partial T_0}{\partial \tau_0} \frac{T_0}{3} (\bar{V}_0 \bar{\beta}_0).$$

Все компоненты этого тензора, вообще говоря, отличны от нуля. Поэтому выполнение преобразования (2.27) с применением вспомогательных соотношений (2.31) и (2.33) осуществляется путем весьма громоздких, хотя и простых вычислений [49]. Этими соотношениями завершаем поставленную задачу о вычислении тензора энергии—импульса излучения в почти равновесных условиях, поскольку $W_{ik} = W_{ik}^{(1)} + W_{ik}^{(2)}$, где $W_{ik}^{(1)}$ дается выражением (2.33).

Отметим, что тензор $W_{ik}^{(2)}$ был ранее получен Томасом [1], и как можно убедиться, наши результаты совпадают. Однако методы вычислений принципиально отличаются. В работе [1] тензор находят сразу в л. с. Наш метод избегает очень сложного интегрирования по угловым переменным из [1], которое резко упрощается на основе применения формул работы [13], но самое главное явно использует тензорные свойства величин W_{ik} и демонстрирует возможность адекватного определения и использования свойств н.с.с.

§ 10. Вязкость излучения. Одномерный случай

Рассмотрим некоторые физические следствия полученных результатов. Перейдем сначала к наиболее простому одномерному плоскому галилеевскому случаю:

$$u_\alpha = \begin{cases} \beta, & \alpha = 1; \\ 0, & \alpha = 2, 3; \end{cases} \quad u_4 = 1; \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \begin{cases} \partial/\partial x, & \alpha = 1; \\ 0, & \alpha = 2, 3. \end{cases} \quad (2.36)$$

Будем пренебрегать всеми членами $\sim \beta^2$, считая, как при получении уравнений (2.34), $\partial/\partial\tau = (1/c) \partial/\partial t \sim \beta \partial/\partial x$. Тогда от сложных выражений W_{ik}^2 останутся следующие выражения ненулевых компонент:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} W_{11}^{(2)} &\approx \frac{1}{3c} \frac{\partial T}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{5} \frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad \frac{1}{A} W_{14}^{(2)} \approx \frac{1}{3} \frac{\partial T}{\partial x}; \\ \frac{1}{A} W_{44}^{(2)} &\approx \frac{1}{c} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{5}{3} \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{3} \frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad \frac{1}{A} W_{22}^{(2)} = \\ &= \frac{1}{A} W_{33}^{(2)} = \frac{1}{3c} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{15} \frac{\partial \beta}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

По сравнению с обычным нерелятивистским рассмотрением [30] здесь в первую очередь можно отметить появление членов вязкости излучения. В потоке энергии — $S_1^{(2)} = S^{(2)} = W_{14}^{(2)}$ из (2.37) присутствует в обычном виде член лучистой теплопроводности. Действительно, подставляя выражение коэффициента A , получаем

$$\begin{aligned} cS^{(2)} &= cW_{14}^{(2)} = c \frac{A}{3} \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{c}{3\alpha_R} \frac{\partial B_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \\ &= - \frac{4acT^3}{3\alpha_R} \frac{\partial T}{\partial x} = - \chi^{(r)} \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $\chi^{(r)} = (4ac/3\alpha_R)T^3$ — коэффициент лучистой теплопроводности [α_R — средний по Росселанду линейный коэффициент поглощения из (2.25)]. Запишем другие компоненты из (2.37):

$$\left. \begin{aligned} -K_1^{(2)} &= W_{11}^{(2)} = - (3\chi^{(r)}/c) [(1/3c) \partial T/\partial t + \beta \partial T/\partial x + \\ &+ (T/5) \partial \beta/\partial x]; \\ J^{(2)} &= W_{44}^{(2)} = - (3\chi^{(r)}/c) [(1/c) \partial T/\partial t + (5\beta/3) \partial T/\partial x + \\ &+ (T/3) \partial \beta/\partial x]. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Тогда в уравнении энтропии можно опустить все члены излучения из второго приближения, за исключением дивергенции потока лучистой теплопроводности (2.38), так как $S^{(2)} \sim K_1^{(2)}/\beta \sim J^{(2)}/\beta$, согласно (2.39) и, следовательно, все остальные члены в (2.13) имеют порядок β^2 по отношению к основному. В уравнении движения из (2.13) оба радиационных члена во втором приближении одного порядка и имеют физический смысл вязкости излучения. Компоненты тензора $W_{22}^{(2)}$ и $W_{33}^{(2)}$ выпадают из уравнений одномерного плоского случая. Запишем эту систему урав-

нений целиком, дополнив систему (2.34) одномерного случая указанными выше членами из (2.38) и (2.39):

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= - \frac{\partial}{\partial x} (p + p^{(r)}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\chi^{(r)}}{c} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\chi^{(r)}}{c} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{3\chi^{(r)}}{c^2} \left(v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{5} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^{(r)}}{\rho} \right) + \rho (p + p^{(r)}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= -c \frac{\partial S^{1(2)}}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi^{(r)} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} (2.40)$$

Первоначальное представление о вязкости излучения было введено еще Джинсом и Милном. Пользуясь элементарной теорией переноса, можно для произвольного газа оценить коэффициент вязкости по формуле $\mu \approx \lambda \bar{v} \rho$, где λ — эффективная длина пробега, $\bar{v}$ — средняя хаотическая скорость, ρ — массовая плотность данных частиц. Для излучения следует положить $\lambda^{(r)} \approx \approx \alpha_R^{-1}$; $\bar{v}^{(r)} \approx c$; $\rho^{(r)} = J/c^2 \approx aT^4/c^2$, откуда $\mu^{(r)} \approx \approx aT^4/(c\alpha_R) \approx \chi^{(r)} T/c^2$, что с точностью до числового множителя порядка единицы совпадает с членами вязкости из (2.40), поскольку плотность потока импульса $K_1^1 \approx \approx -\mu dv/dx$ для любого газа.

Вычислим тензор $W_{ik}^{(2)}$ для одномерного сферически-симметричного случая, но уже не ограничиваясь приближением Галилея, как это было сделано в одномерном плоском случае (2.37). В обозначениях уравнений (2.16) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} K &= \frac{1}{A} W_{11} = \frac{1}{3} \frac{1+5\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\beta(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial r} + \\ &+ \frac{T}{5} \frac{1+5\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\beta T}{15} \frac{13+5\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \frac{1}{A} \left(\frac{B_0^*}{3} + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{3} B_0^* \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right); \\ \frac{1}{A} S &= \frac{1}{A} W_{14} = \frac{1}{A} \frac{4B_0^*}{3} \frac{\beta}{1-\beta^2} + \frac{1}{3} \frac{\beta(5+\beta^2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{1+5\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{T}{15} \frac{5+13\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \\ &+ \frac{\beta T}{15} \frac{13+5\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} \frac{\partial \beta}{\partial r}; \\ \frac{1}{A} J &= \frac{1}{A} W_{44} = \frac{1}{A} \frac{B_0^*}{3} \frac{3+\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\beta(5+\beta^2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\beta T}{5} \frac{5+\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \frac{T}{15} \frac{5+13\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} \frac{\partial \beta}{\partial r}. \end{aligned} \right\} (2.41)$$

В галилеевском случае дифференциальные части этих выражений, естественно, совпадают с (2.39) и (2.38), сферический и плоский случай ничем не отличаются в компонентах $W_{ik}^{(2)}$. Выражения J , S и K из (2.41) следует подставить в уравнения (2.15). Тогда мы получим одномерные сферически-симметричные уравнения релятивистской гидродинамики с излучением, которые помимо равновесного излучения учитывают члены типа теплопроводности и вязкости излучения. Из решения этих уравнений с надлежащими граничными и начальными условиями мы можем найти величины $\beta = \beta(r, \tau)$ и $T = T(r, \tau)$. К ним необходимо добавить уравнение непрерывности (2.12), которое в сферически-симметричном случае имеет вид

$$d\rho/d\tau + (\rho/r^2)\partial(\beta r^2)/\partial r + \beta\rho(1 - \beta^2)^{-1} d\beta/d\tau = 0. \quad (2.42)$$

Из этого уравнения в принципе определяется величина плотности $\rho = \rho(r, \tau)$. Конечно, подразумевается заданным уравнение состояния вещества в общем виде $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ и $p = p(\rho, T)$.

Легко понять, что уравнения для одномерного плоского случая следуют из (2.15) и (2.42), в которых отсутствуют члены с r^{-1} , а для цилиндрического случая просто должна быть сделана простая замена: $(J - 3K)/r \rightarrow (J - 2K)/r$, $2S/r \rightarrow S/r$, где r — цилиндрический радиус. Сами компоненты тензора (2.41), как уже говорилось, остаются неизменными.

ГЛАВА 3

ЭФФЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ В УРАВНЕНИЯХ РРГД. ТОМСОНОВСКОЕ И КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ ФОТОНОВ ЭЛЕКТРОНАМИ ВЕЩЕСТВА

Конкретное описание эффектов взаимодействия излучения с веществом в существенной степени зависит от условий, в которых указанное взаимодействие протекает. Это связано с исключительной сложностью выражений для столкновительных членов, что вынуждает прибегать к тем или иным упрощениям, оправданным только во вполне определенных условиях. Существенного упрощения можно, например, добиться, если пренебречь индуцированным излучением в членах рассеяния. В этом случае уравнение Больцмана со столкновительными членами поглощения и рассеяния становится линейным относительно функции распределения фотонов F_ν , что дает возможность получить на его основе уравнения моментов и тем самым сформулировать систему уравнений РРГД, применяемую для описания ряда практически важных физических явлений. В данной главе мы подробно рас-

считаем только такие физические процессы, для которых предельное равновесное состояние можно описать на основе локального термодинамического равновесия (ЛТР), под которым мы в соответствии с принятым употреблением этого термина в астрофизике понимаем возможность представления равновесной функции распределения фотонов формулой Планка для черного излучения.

§ 11. Рассеяние фотонов на электронах вещества

Общий вид уравнения Больцмана в и.с.с. дается выражениями (1.35), (1.40) и (1.42):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{\nu 0}}{\partial \tau_0} + \bar{l}_0 \frac{\partial F_{\nu 0}}{\partial \bar{x}_0} &= \frac{dF_{\nu 0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}^{(a)} + \frac{dF_{\nu 0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}^{(s)}; \quad \frac{dF_{\nu 0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}^{(a)} = \\ &= \alpha'_{\nu 0} (\tilde{F}_{\nu 0}^a - F_{\nu 0}); \\ \tilde{F}_{\nu 0}^a &= [\exp(h\nu_0/kT_0) - 1]^{-1}; \quad \frac{dF_{\nu 0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}^{(s)} = \int_{(V_{E0}^s)} dV_{E0}^s \frac{E_0^s}{c} \times \\ &\times \int_{(\nu_{10}, \bar{l}_{10})} d\sigma_0^s(\nu_{10}, \bar{l}_{10}; \nu_0, \bar{l}_0) \tilde{F}_0^s (1 - \tilde{F}_{10}^s) \{-F_{\nu 0} (1 + F_{\nu 10}) + \\ &+ F_{\nu 10} (1 + F_{\nu 0}) \exp[h(\nu_{10} - \nu_0)/kT_0]\}; \\ \tilde{F}_0^s &= \{\exp[(E_0^s - \psi_0^s)/kT_0] + 1\}^{-1}; \quad \tilde{F}_{10}^s = \{\exp[(E_{10}^s - \\ &- \psi_{10}^s)/kT_0] + 1\}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

В (3.1) мы ограничиваемся рассеянием фотонов на фермионах ($\gamma_s = +1$), точнее говоря, на электронах. Наибольшие упрощения в этих выражениях достигаются в двух практически важных случаях — при доминировании процессов поглощения и рассеяния фотонов. Главным различием указанных предельных случаев является различие в равновесных функциях распределения фотонов: при доминировании поглощения выполняются условия локального термодинамического равновесия, и равновесная функция распределения фотонов $\tilde{F}_{\nu 0}^a$ дается формулой Планка (1.40); при преобладании процессов рассеяния в результате многократных столкновений и обмена энергией — импульсом между электронами и фотонами (вследствие прямого и обратного комптон-эффекта) успевают произойти полная комптонизация фотонов, и устанавливается локальное бозе-эйнштейновское распределение фотонов:

$$\tilde{F}_{\nu 0}^s = \{\exp[(h\nu_0 - \psi_0)/kT_0] - 1\}^{-1} \quad (3.2)$$

с произвольной величиной $\psi_0 \leq 0$, не зависящей от частоты фотонов ν_0 , которую можно назвать химическим потенциалом фотонов. Действительно, при подстановке $\tilde{F}_{\nu_0}^a$ в (3.1) получаем $dF_{\nu_0}/d\tau_0 |_{\text{ст}}^{(a)} \equiv 0$, а при подстановке $\tilde{F}_{\nu_0}^s$ будем иметь $dF_{\nu_0}/d\tau_0 |_{\text{ст}}^{(s)} \equiv 0$.

Таким образом, при значительной роли процессов поглощения среди эффектов взаимодействия излучения с веществом, фотоны могут описываться функцией распределения с химическим потенциалом фотонов $\psi_0 = 0$. Используя это приближение (случай $\psi_0 \neq 0$ исследован в гл. 5), сделаем дальнейшие предположения с целью упрощения членов $dF_{\nu_0}/d\tau_0 |_{\text{ст}}^{(s)}$, описывающих процессы рассеяния.

В условиях, когда процессы рассеяния становятся существенными, вырождение электронов обычно отсутствует ($\tilde{F}_{10}^s \ll 1$), так что членами $\tilde{F}_0^s \tilde{F}_{10}^s$ в (3.1) можно пренебречь. Кроме того, будем далее рассматривать только такие условия, при которых можно пренебречь индуцированным излучением в членах рассеяния, т. е. произведениями $F_{\nu_0} F_{\nu_{10}}$.

Тогда уравнение (3.1) можно представить в более простом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\nu_0}}{\partial \tau_0} + \bar{l}_0 \frac{\partial F_{\nu_0}}{\partial \bar{x}_0} = & \alpha'_{\nu_0} (\tilde{F}_{\nu_0}^a - F_{\nu_0}) - F_{\nu_0} \frac{2}{h^3} \int_{(\bar{p}_0)} f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 \times \\ & \times \int_{(\nu_0, \bar{l}_0)} d\sigma_{\nu_0} + F_{\nu_0} \frac{2}{h^3} \int_{(\bar{p}_0)} f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 \int_{(\nu_{10}, \bar{l}_{10})} d\sigma_{\nu_{10}} (\bar{l}_{10}, \bar{l}_0) \times \\ & \times F_{\nu_{10}} \exp \left[\frac{h(\nu_{10} - \nu_0)}{kT_0} \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $f(\bar{p}_0) = (2/h^3) \tilde{F}_0^s$ — равновесная функция распределения начальных импульсов электронов, а $(2/h^3) d\bar{p}_0 = (E_0^s/c) dV_{E_0}^s$, согласно (1.39). И, наконец, один из самых простых видов для уравнения (3.3) получится для условий когерентного рассеяния (приближение Томсона), при котором электрон и фотон не обмениваются энергией.

В результате находим в соответствии с (1.43) уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial F_{\nu_0}}{\partial \tau_0} + \bar{l}_0 \frac{\partial F_{\nu_0}}{\partial \bar{x}_0} = \alpha'_{\nu_0} (\tilde{F}_{\nu_0}^a - F_{\nu_0}) + \sigma_0 \left[\int_{(\bar{l}'_0)} F'_{\nu_0} \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0 - F_{\nu_0} \right]. \quad (3.4)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_T N_0^s$ — коэффициент рассеяния (обратный пробег), N_0^s — концентрация рассеивающих электронов, которую можно вычислять и по (1.44) с учетом их квантово-статистических свойств, σ_T — постоянное сечение рассеяния Томсона; $\Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0)$ — сим-

метричная индикатриса рассеяния фотонов с направляющим 3-вектором $\bar{l}'_0$ и нормировкой

$$\int_{(\bar{l}'_0)} \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0 = 1; \quad \int_{(\bar{l}_0)} \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}_0 = 1. \quad (3.5)$$

В (3.4) и (3.5) введено удобное для последующих вычислений обозначение нормированного элемента телесного угла рассеянного фотона: $d\bar{l}'_0 = d\omega'_0/4\pi = d\cos\theta'_0 d\varphi'_0/4\pi$.

В соответствии с определениями моментов (2.3), (2.7) запишем выражения для спектральных и интегральных моментов в одномерном случае, используя нормированный телесный угол $d\bar{l}_0$ и переходя к обычным трехмерным обозначениям:

$$\left. \begin{aligned} N_0 = N_{40} &= \frac{4\pi}{ch} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} \frac{I_{v0}}{v_0} d\bar{l}_0; & H_0 = N_{10} &= \frac{4\pi}{ch} \int_0^\infty dv_0 \times \\ &\times \int_{(\bar{l}_0)} \left(\frac{I_{v0}}{v_0} \right) l_{10} d\bar{l}_0; \\ J_{v0} &= \frac{4\pi}{c} \int_{(\bar{l}_0)} I_{v0} d\bar{l}_0; & J_0 &= \int_0^\infty J_{v0} dv_0; & S_{v0} &= \frac{4\pi}{c} \int_{(\bar{l}_0)} I_{v0} l_{10} d\bar{l}_0, \\ S_0 &= \int_0^\infty S_{v0} dv_0; & K_{v0} &= \frac{4\pi}{c} \int_{(\bar{l}_0)} I_{v0} (l_{10})^2 d\bar{l}_0; & K_0 &= -K_{01} = \\ &= \int_0^\infty K_{v0} dv_0; & I_{v0} &= \frac{ghv_0^3}{c^2} F_{v0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Ниже для простоты ограничимся рассмотрением плоского одномерного случая. Заметим, что величины S_{v0} , S_0 , которые мы ранее называли спектральной и интегральной плотностями потока энергии излучения, имеют соответственно смысл спектральной и интегральной плотностей импульса излучения. Уравнения (3.3), (3.4) служат основой для получения выражений, описывающих изменение числа, энергии и импульса фотонов при их взаимодействии с веществом.

§ 12. Учет эффектов томсоновского рассеяния в уравнениях РРГД (с. с.)

Начнем с простейшего когерентного случая, описываемого уравнением (3.4). Умножая это уравнение на $[(4\pi/c^3)v_0^3 dv_0 d\bar{l}_0]$ и интегрируя в соответствующих пределах, в согласии с (2.14) находим следующее уравнение для изменения числа фотонов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial H_0}{\partial x_0} &= \int_0^\infty d\nu_0 \left(\frac{B_{\nu 0}^* - J_{\nu 0}}{h\nu_0} \right) + \frac{4\pi\sigma_0}{c} \left[\int_0^\infty d\nu_0 \times \right. \\ &\times \int_{(\bar{l}_0)} d\bar{l}_0 \frac{I_{\nu 0}(\bar{l}_0)}{h\nu_0} \int_{(\bar{l}'_0)} d\bar{l}'_0 \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) - \int_0^\infty d\nu_0 \int_{(\bar{l}_0)} d\bar{l}_0 \frac{I_{\nu 0}(\bar{l}_0)}{h\nu_0} \left. \right]; \quad (3.7) \\ B_{\nu 0}^* &= \frac{4\pi}{c} B_{\nu 0} = \frac{4\pi gh\nu_0^3}{c^3} \tilde{F}_{\nu 0}^a. \end{aligned} \right\}$$

Используя здесь нормировку (3.5), обнаруживаем, что процессы когерентного рассеяния в с. с. не дают вклада в изменение числа фотонов. Свойство когерентности рассеяния при этом является очень важным, поскольку если бы рассеяние характеризовалось часто используемой функцией переизлучения

$$\Omega'_0(\nu'_0, \bar{l}'_0; \nu_0, \bar{l}_0) \quad \text{с нормировкой} \quad \int_0^\infty d\nu'_0 \int_{(\bar{l}'_0)} d\bar{l}'_0 \Omega'_0 = 1;$$

$$\int_0^\infty d\nu_0 \int_{(\bar{l}_0)} d\bar{l}_0 \Omega'_0 = 1, \quad \text{то при проведении интегрирования}$$

уравнения Больцмана, аналогичного (3.4), но с функцией переизлучения, мы не смогли бы в уравнении (3.7) эффективно использовать ее нормировку таким образом, чтобы вклад в изменение числа фотонов от членов рассеяния оказался равным нулю. Это связано с тем, что нормировка функции переизлучения соответствует закону сохранения энергии в процессах рассеяния, описываемых этой функцией [26].

Умножая теперь уравнение (3.4) последовательно на $[(4\pi gh\nu_0^3/c^3) d\bar{l}_0]$ и $[(4\pi gh\nu_0^3/c^3) l_{10} d\bar{l}_0]$ и производя интегрирование, получаем из (2.15) с учетом определений (3.6) уравнения для изменения спектральных плотностей энергии и импульса излучения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_{\nu 0}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial S_{\nu 0}}{\partial x_0} &= \alpha'_{\nu 0} (B_{\nu 0}^* - J_{\nu 0}) + \sigma_0 \left[\frac{4\pi}{c} \int_{(\bar{l}_0)} d\bar{l}_0 I_{\nu 0}(\bar{l}_0) \times \right. \\ &\times \int_{(\bar{l}'_0)} \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0 - J_{\nu 0} \left. \right]; \\ \frac{\partial S_{\nu 0}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial K_{\nu 0}}{\partial x_0} &= -\alpha'_{\nu 0} S_{\nu 0} + \sigma_0 \left[\frac{4\pi}{c} \int_{(\bar{l}_0)} d\bar{l}_0 I_{\nu 0}(\bar{l}_0) \times \right. \\ &\times \int_{(\bar{l}'_0)} \Omega_0(l'_0, \bar{l}_0) l'_{10} d\bar{l}'_0 - S_{\nu 0} \left. \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

В первом уравнении использование нормировки (3.5) также приводит к исчезновению вклада процессов рассеяния в обмен

энергией излучения с веществом. Однако в последнем уравнении члены, связанные с рассеянием, в общем случае не уничтожаются. Когда индикатриса $\Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0)$ изотропна или содержит только четные степени скалярного произведения $(\bar{l}_0 \bar{l}'_0)$ как, например, нормированная индикатриса рассеяния Рэлея $\Omega_{R0}(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) = (3/4) [1 + (\bar{l}_0 \bar{l}'_0)^2]$, среднее значение от направляющего косинуса $\int_{(\bar{l}'_0)} l'_{10} \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0 = 0$ и интегральный член рас-

сеяния во втором уравнении (3.8) исчезает. В общем же случае он равен $l_{10} \langle \cos \theta \rangle$, где $\langle \cos \theta \rangle$ — некоторый численный коэффициент, меньший единицы. Более конкретный вид указанного интеграла можно получить на основе формул векторного интегрирования скалярных произведений по нормированному телесному углу одного из векторов, входящих в эти произведения, которые приведены в [13].

Таким образом, в самом общем случае вклад рассеяния во второе уравнение из (3.8) дается членами вида $\sigma_0 (1 - \langle \cos \theta \rangle) S_{v0}$. Величина $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 (1 - \langle \cos \theta \rangle)$ носит название «транспортного» сечения рассеяния.

Итак, уравнения изменения числа фотонов, спектральных плотностей энергии и импульса излучения окончательно имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial H_0}{\partial x_0} &= \int_0^\infty \alpha'_{v0} \left(\frac{B_{v0}^* - J_{v0}}{h\nu_0} \right) d\nu_0 = Q_0; \\ \frac{\partial J_{v0}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial S_{v0}}{\partial x_0} &= \alpha'_{v0} (B_{v0}^* - J_{v0}); \\ \frac{\partial S_{v0}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial K_{v0}}{\partial x_0} &= -(\alpha'_{v0} + \bar{\sigma}_0) S_{v0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Наиболее сложно в дальнейших вычислениях учесть зависимость коэффициента поглощения α'_{v0} от частоты. Иногда можно воспользоваться следующей приближенной процедурой усреднения этой зависимости. Во втором уравнении (3.9) усредняется коэффициент поглощения по распределению Планка:

$$\int_0^\infty \alpha'_{v0} J_{v0} d\nu_0 \approx \alpha_p J_0, \quad \text{где } \alpha_p = B_0^{-1} \int_0^\infty \alpha'_{v0} B_{v0} d\nu_0.$$

В третьем уравнении (3.9) более естественно ввести усреднение по Росселанду:

$$\int_0^\infty (\alpha'_{v0} + \bar{\sigma}_0) S_{v0} d\nu_0 \approx \kappa_R S_0,$$

где

$$\kappa_R^{-1} = \left(\frac{\partial B_0}{\partial T_0} \right)^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \frac{\partial B_{\nu 0}}{\partial T_0} d\nu_0,$$

что обобщает в согласии с [30] обычное определение (2.25). Оба способа усреднения опираются на соответствующие формулы при почти равновесных условиях (2.26). Учитывая таким образом введенные средние коэффициенты взаимодействия излучения с веществом α_p и κ_R , получаем интегрированием по частоте двух последних уравнений (3.9) следующие приближенные уравнения для интегральных моментов излучения:

$$\left. \begin{aligned} \partial J_0 / \partial \tau_0 + \partial S_0 / \partial x_0 &= \alpha_p (B_0^* - J_0) = q_{40}; \\ \partial S_0 / \partial \tau_0 + \partial K_0 / \partial x_0 &= -\kappa_R S_0 = q_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Здесь справа в соответствии с определением (2.14) введены компоненты 4-вектора $\bar{q}_0$ — обмена энергией — импульсом излучения с веществом.

§ 13. Эффекты томсоновского рассеяния фотонов в л. с.

Не представляет труда вывести уравнения, аналогичные (3.10) в л. с. поскольку $q_{k0} = \partial W_{ik}^0 / \partial x_{i0}$ — ковариантные компоненты 4-вектора.

Используя общие связи (1.7), находим:

$$\left. \begin{aligned} q_4 &= \theta (q_{40} + \beta q_{10}) = \theta [\alpha_p (B_0^* - J_0) - \beta \kappa_R S_0]; \\ q_1 &= \theta (q_{10} + \beta q_{40}) = \theta [-\kappa_R S_0 + \beta \alpha_p (B_0^* - J_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В результате для уравнений моментов (2.14), записанных в одномерном сферически-симметричном случае (переход к плоскому случаю отсюда элементарен, см. § 11) после использования общих связей (1.6), (1.7) для перехода к компонентам J, S, K тензора энергии — импульса излучения в л. с. получаем:

$$\left. \begin{aligned} \partial J / \partial \tau + \partial S / \partial r + 2S/r &= q_4 = \theta^3 \{ \alpha_p [B_0^* - J + 2\beta S - \\ &- \beta^2 (B_0^* + K)] - \beta \kappa_R [S (1 + \beta^2) - \beta (J + K)] \}; \\ \partial S / \partial \tau + \partial K / \partial r - (J - 3K)/r &= q_1 = \theta^3 \{ -\kappa_R [S (1 + \\ &+ \beta^2) - \beta (J + K)] + \beta \alpha_p [B_0^* - J + 2\beta S - \beta^2 (B_0^* + K)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Уравнения (3.12) справедливы при сколь угодно больших скоростях движения вещества. Следует только помнить, что при их выводе были применены процедуры усреднения частотных коэффициентов поглощения и рассеяния излучения, так что в этом смысле данные уравнения оказываются приближенными.

Отметим следующую важную особенность уравнений (3.12): эффекты рассеяния (входящие в члены с коэффициентом непро-

зрачности κ_R) проявляют себя в л. с. не только в обмене импульсом, но и в обмене энергией, причем изменение энергии излучения вследствие рассеяния равно соответствующему изменению импульса, умноженному на β . Это является, в сущности, следствием связей (3.11). В самом деле, для «чистого» рассеяния, как мы показали ранее в (3.10), вклады в 4-вектор $\bar{q}_0$ в результате рассеяния $q_{40}^s = 0$, $q_{10}^s \neq 0$, так что из (3.11) будем иметь $q_4^s = \beta \theta q_{10}^s$; $q_1^s = \theta q_{10}^s$, т. е. $q_4^s = \beta q_1^s$.

Полученный результат может служить контролем при выводе уравнений (3.12) другим путем — непосредственно из уравнения Больцмана в л.с., аналогичного уравнению (3.3). Это уравнение в терминах интенсивности излучения и феноменологической функции переизлучения Ω' , введенной, например, в [26], в одномерном сферическом случае записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial I_\nu / \partial \tau + \mu (\partial I_\nu / \partial r) + [(1 - \mu^2)/r] \partial I_\nu / \partial \mu = \alpha'_\nu (B_\nu - I_\nu) - \sigma_\nu I_\nu + \\ + \int_{(\bar{l}_1)} d\bar{l}_1 \int_0^\infty dv_1 \sigma_{\nu 1} \Omega'(\nu_1, \bar{l}_1; \nu, \bar{l}) I_{\nu 1}(\bar{l}_1), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $B_\nu = B_{\nu 0} (\nu/\nu_0)^3$; $\bar{n} = \bar{r}/r = \bar{\beta}/\beta$; $\mu = (\bar{l} \bar{n})$; $\mu_1 = (\bar{l}_1 \bar{n})$. Функция переизлучения Ω' нормирована:

$$\int_0^\infty dv_1 \int_{(\bar{l}_1)} d\bar{l}_1 \Omega'(\nu_1, \bar{l}_1; \nu, \bar{l}) = 1.$$

В уравнении (3.13) следует использовать линейные коэффициенты поглощения и рассеяния, заданные в с. с. на основе связей (1.47). В результате правую часть уравнения (3.13) можно записать в форме:

$$\begin{aligned} dI_\nu / d\tau|_{\text{с.т.}} = \alpha'_{\nu 0} \frac{B_{\nu 0}}{L^2} - \alpha'_{\nu 0} I_\nu L - \sigma_{\nu 0} I_\nu L + \\ + \int_{(\bar{l}_1)} d\bar{l}_1 L_1 \int_0^\infty dv_1 \sigma_{\nu 1 0} \Omega'(\nu_1, \bar{l}_1; \nu, \bar{l}) I_{\nu 1}(\bar{l}_1), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где учтены следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 = \nu L; \quad \nu_{10} = \nu_1 L_1; \quad \alpha'_{\nu 0} = \alpha'_\nu / L; \quad \sigma_{\nu 0} = \sigma_\nu / L; \\ \sigma_{\nu 1 0} = \sigma_{\nu 1} / L; \quad L = \theta [1 - \beta (\bar{l} \bar{n})]; \quad L_1 = \theta [1 - \beta (\bar{l}_1 \bar{n})]. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Функцию переизлучения Ω' также можно выразить через соответствующую величину Ω'_0 из с. с., если дополнительно учесть связи между дифференциалами (1.21): $dv_{10} d\bar{l}_{10} = dv_1 d\bar{l}_1 / L_1$ и

интенсивностями (1.28): $I_{v0} = I_v L^3$; $I_{v10} = I_{v1} L_1^3$. В результате получим соотношение

$$\Omega' (v_1, \bar{l}_1; v, \bar{l}) = \Omega'_0 (v_{10}, \bar{l}_{10}; v_0, \bar{l}_0) L_1 / L^2. \quad (3.16)$$

Это дает возможность представить в с. с. весь столкновительный член (3.14), так что уравнение (3.13) окончательно записывается через характеристики процессов поглощения и рассеяния, заданные в с. с. следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_v}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial I_v}{\partial r} + [(1 - \mu^2)/r] \frac{\partial I_v}{\partial \mu} = \alpha'_{v0} (B_{v0}/L^2 - I_v L) - \\ - \sigma_{v0} I_v L + \frac{1}{L^2} \int_{(\bar{l}_{10})} d\bar{l}_{10} \int_0^\infty dv_{10} \sigma_{v10} \Omega'_0 (v_{10}, \bar{l}_{10}; v_0, \bar{l}_0) I_{v10} (\bar{l}_{10}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подчеркнем, что ввиду связей (1.21) и (1.33):

$$\left. \begin{aligned} (\bar{l}_0 \bar{n}) &= \frac{(\bar{l} \bar{n}) - \beta}{1 - \beta (\bar{l} \bar{n})}; \quad (\bar{l}_{10} \bar{n}) = \frac{(\bar{l}_1 \bar{n}) - \beta}{1 - \beta (\bar{l}_1 \bar{n})}; \quad d\bar{l}_0 = \frac{d\bar{l}}{L^2}; \\ d\bar{l}_{10} &= d\bar{l}_1 / L_1^2; \quad dv_0 = dv L; \quad dv_{10} = dv_1 L_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

и, следовательно, интегральный член рассеяния в (3.17) определен однозначно.

Покажем, как выводятся уравнения моментов (3.12) в простейшем случае изотропной и когерентной функции переизлучения:

$$\begin{aligned} \Omega'_0 (v_{10}, \bar{l}_{10}; v_0, \bar{l}_0) &= \delta (v_{10} - v_0); \\ \Omega' (v_1, \bar{l}_1; v, \bar{l}) &= L_1 \delta (v_{10} - v_0) / L^2 = \\ &= L_1 \delta [L_1 (v_1 - v L / L_1)] / L^2 = \delta (v_1 - v L / L_1) / L^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставим постоянное томсоновское сечение $\sigma_{v0} = \sigma_{v10} \equiv \sigma_0$ и функцию Ω' из (3.19) для л. с. в уравнение (3.14). Получаем после интегрирования по частоте в члене рассеяния уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_v}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial I_v}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \mu} = \alpha'_{v0} \left(\frac{B_{v0}}{L^2} - I_v L \right) - \sigma_0 I_v L + \\ + \frac{\sigma_0}{L^2} \int_{\bar{l}_1} d\bar{l}_1 L_1 I_{vL/L_1} (\bar{l}_1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Проинтегрируем это уравнение по частоте v , вводя некоторое усреднение коэффициентов поглощения по частоте α_p^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} = \alpha_p^* \frac{B_0}{L^3} - (\alpha_p^* + \sigma_0) I L + \\ + \frac{\sigma_0 \theta^2}{L^3} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu_1 I(\mu_1) (1 - 2\beta\mu_1 + \beta^2 \mu_1^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{L^3} = \frac{1}{2\theta^3} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^3} = \theta;$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{L^3} = \frac{1}{2\theta^3} \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{(1-\beta\mu)^3} = \beta\theta,$$

проинтегрируем (3.21) по $d\bar{l} = d\mu d\varphi/4\pi$, умножив (3.21) на $4\pi/c$:

$$\partial J/\partial \tau + \partial S/\partial r + 2S/r = \alpha_p^* \theta B_0^* - (\alpha_p^* + \sigma_0) \theta (J - \beta S) +$$

$$+ \sigma_0 \theta^3 (J - 2\beta S + \beta^2 K). \quad (3.22)$$

Это уравнение совпадает с первым уравнением из (3.12) с точностью до усреднения по частотам коэффициентов поглощения. Аналогичное интегрирование уравнения (3.21), умноженного на $(4\pi/c)\mu$, дает второе уравнение из (3.12).

Несколько сложнее процедура получения этих же уравнений при рэлеевской индикатрисе рассеяния, для которой функция переизлучения в отличие от (3.19) имеет вид

$$\Omega'_0(\nu_{10}, \bar{l}_{10}; \nu_0, \bar{l}_0) = (3/4) (1 + \cos^2 \Theta_0) \delta(\nu_{10} - \nu_0), \quad (3.23)$$

где косинус угла рассеяния

$$\cos \Theta_0 = (\bar{l}_{10} \bar{l}_0) = \mu_0 \mu_{10} + \sqrt{1 - \mu_0^2} \sqrt{1 - \mu_{10}^2} \cos(\varphi_0 - \varphi_{10}).$$

В уравнении (3.21) появится под интегралом в виде множителя выражение

$$F_0(\mu_0, \mu_{10}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_{10} \Omega'_0 = \frac{3}{4} \left[1 + \mu_0^2 \mu_{10}^2 + \frac{(1 - \mu_0^2)(1 - \mu_{10}^2)}{2} \right]. \quad (3.24)$$

Выражая μ_0 и μ_{10} в (3.24) через μ и μ_1 , как это делалось ранее [см. (1.33)], в результате чего $F_0(\mu_0, \mu_{10}) = F(\mu, \mu_1)$, можно записать интегральный член рассеяния после интегрирования в виде

$$G = \frac{\sigma_0}{L^3} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu_1) L_1^2 F(\mu, \mu_1) d\mu_1 = \frac{3c\sigma_0}{16\pi\theta(1-\beta\mu)^3} \times$$

$$\times \left\{ (J - 2\beta S + \beta^2 K) + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} (K - 2\beta S + \beta^2 J) + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \mu^2}{2\theta^2(1 - \beta\mu)^2} (J - K) \right\}. \quad (3.25)$$

Для нахождения моментов (3.25) следует проинтегрировать по μ . После некоторых вычислений с интегралами типа использованных при интегрировании уравнения (3.21), можно получить:

$$\frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 G d\mu = \sigma_0 \theta^3 (J - 2\beta S + \beta^2 K);$$

$$\frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 G \mu d\mu = \beta \sigma_0 \theta^3 (J - 2\beta S + \beta^2 K),$$

что приводит нас к уравнению (3.22) и подобному ему другому уравнению, которые вместе и составляют систему (3.12).

Таким образом, мы двумя независимыми способами обосновали важную для приложений к различным физическим проблемам систему уравнений (3.12). Важно подчеркнуть, насколько проще первый способ вывода, основанный на первоначальном выводе этой системы в с. с. в форме (3.10). Даже для томсоновского рассеяния со сравнительно простыми индикатрисами рассеяния (3.19) и (3.23) непосредственный вывод в л. с. нельзя считать элементарным. В гл. 2 мы уже указывали на предпочтительность двухэтапного вывода интегральных моментов излучения: сначала в с. с. (§ 9), а потом в л. с. (§ 10). Теперь опять можно сделать такое же заключение.

Наконец, заметим, что совокупность уравнений (2.15) и (3.12) еще не достаточна для полноты систем РРГД. Два уравнения из (3.12) включают три момента излучения J , S и K (уравнение непрерывности из (3.12) пока не рассматриваем, но оно включает еще два новых момента N и H). Требуется какое-то одно дополнительное соотношение между этими моментами излучения, чтобы система уравнений РРГД стала полной. Эта проблема рассматривается в конце данной главы, а пока мы перейдем к обсуждению комптоновского рассеяния фотонов на электронах.

§ 14. Учет эффектов комптоновского рассеяния в уравнениях РРГД. Исходные соотношения

Представляет значительный интерес определить вклад эффектов рассеяния в уравнения переноса энергии и импульса излучения в условиях, когда взаимодействие является настолько сильным, что изменением импульса электрона при рассеянии на нем фотона пренебречь уже нельзя. В этом случае исходным является уравнение (3.3), которое для интенсивности излучения записывается в форме

$$\frac{\partial I_{\nu 0}(\bar{l}_0)}{\partial \tau_0} + \bar{l}_0 \frac{\partial I_{\nu 0}(\bar{l}_0)}{\partial \bar{x}_0} = \alpha'_{\nu 0} [B_{\nu 0} - I_{\nu 0}(\bar{l}_0)] -$$

$$-I_{v0}(\bar{l}_0) \int_{(\bar{p}_0)} f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 \int_{(v_{10}, \bar{l}_{10})} d\sigma_{v10} + \int_{(\bar{p}_0)} f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 \times \\ \times \int_{(v_{10}, \bar{l}_{10})} d\sigma_{v10} \left(\frac{v_0}{v_{10}} \right)^3 I_{v10}(\bar{l}_{10}) \exp \left[\frac{h(v_{10} - v_0)}{kT_0} \right]. \quad (3.26)$$

Это уравнение записано в и. с., относительно которой макроскопическая скорость газа равна нулю (собственная система отсчета K_0 — с. с. K_0). В качестве вспомогательной системы будем использовать инерциальную систему отсчета покоящегося электрона K_0^* (с. о. п. э. K_0^*), относительно которой равна нулю скорость рассеивающего электрона. Для достаточно высоких температур и низких плотностей газа, при которых только и существенны эффекты рассеяния, главным механизмом является комптоновское рассеяние излучения на свободных электронах с максвелловским релятивистским распределением по импульсу (p_0 — в единицах m_0c):

$$f(\bar{p}_0) = \frac{f(p_0)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{N_0 x}{K_2(x)} \exp(-x \sqrt{1 + p_0^2}); \quad x = \frac{m_e c^2}{kT_0}. \quad (3.27)$$

Здесь N_0 — плотность электронов в с. с. K_0 , а $K_2(x)$ — функция Макдональда второго порядка, определяемая для n -го порядка общим соотношением

$$K_n(x) = \frac{x^n}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \frac{\exp(-x \sqrt{1 + p_0^2}) p_0^{2n}}{\sqrt{1 + p_0^2}} dp_0. \quad (3.28)$$

Функцию $K_2(x)$ можно представить также в ином виде: $K_2(x) = x \int_0^\infty \exp(-x \sqrt{1 + p_0^2}) p_0^2 dp_0$, из которого следует нормировка функции распределения (3.27):

$$\int_0^\infty f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 = 4\pi \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 dp_0 = \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 dp_0 = N_0.$$

Дифференциальное сечение рассеяния излучения на покоящемся электроне (т. е. в системе K_0^*) дается формулой Клейна—Нишины—Тамма [25]:

$$d\sigma_{v10}^* = \frac{3\sigma_T}{4} \left\{ \frac{1 + (\bar{l}_0^* \bar{l}_{10}^*)^2}{[1 + h_e v_0^* (1 - \bar{l}_0^* \bar{l}_{10}^*)]^2} + \frac{h_e^2 (v_0^*)^2 (1 - \bar{l}_0^* \bar{l}_{10}^*)^2}{[1 + h_e v_0^* (1 - \bar{l}_0^* \bar{l}_{10}^*)]^3} \right\} \times \\ \times \delta \left[v_{10}^* - \frac{v_0^*}{1 + h_e v_0^* (1 - \bar{l}_0^* \bar{l}_{10}^*)} \right] dv_{10}^* d\bar{l}_{10}^*. \quad (3.29)$$

Здесь σ_T — томсоновское сечение рассеяния, $h_e = h/m_e c^2$, а $d\bar{l}_{10} = d\omega_{v10}^*/4\pi$ — нормированный телесный угол.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые связи между величинами, определенными во введенных нами системах отсчета (с.о.) K_0 и K_0^* . Если обозначить через $\bar{\beta}_0$ 3-скорость электрона в с. с. K_0 , а через $\bar{n}_0$ — ее направляющий вектор ($\bar{\beta}_0 = \beta_0 \bar{n}_0$), то из формул (1.28), (1.33) и (3.18) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v_0^* &= v_0 L_0; L_0 = \theta_0 (1 - \bar{\beta}_0 \bar{l}_0) = \frac{1}{\theta_0 (1 + \bar{\beta}_0 \bar{l}_0^*)}; \theta_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}; \\ \bar{l}_0^* &= \frac{\bar{l}_0 + (\theta_0 - 1) (\bar{l}_0 \bar{n}_0) \bar{n}_0 - \theta_0 \bar{\beta}_0}{\theta_0 (1 - \bar{\beta}_0 \bar{l}_0)}; \bar{l}_0 = \frac{\bar{l}_0^* + (\theta_0 - 1) (\bar{l}_0^* \bar{n}_0) \bar{n}_0 + \theta_0 \bar{\beta}_0}{\theta_0 (1 + \bar{\beta}_0 \bar{l}_0^*)}; \\ dv_0^* &= dv_0 L_0; d\bar{l}_0^* = d\bar{l}_0 / L_0^2; I_{v0}^* = I_{v0} L_0^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Нетривиальным является вопрос о связи между сечением $d\sigma_{v0}^*$ из (3.29) и сечением $d\sigma_{v0}$, определенным в и. с. из уравнения (3.26). В этой с. о. импульсы электронов заданы максвелловским распределением (3.27), в то время как сечение $d\sigma_{v0}^*$ вычислено для покоящегося электрона. Для получения связи между сечениями $d\sigma_{v0}$ и $d\sigma_{v0}^*$ воспользуемся свойствами релятивистской инвариантности столкновительного члена (1.45), записанного для интенсивности излучения в с. о. K_0 и K_0^* :

$$\begin{aligned} & L_0^{-2} \int_{(v_{E0}^*)} dV_{E0}^* F(\bar{p}_0^*) \frac{E_0^*}{c} \int_{(v_{10}^*, \bar{l}_{10}^*)} d\sigma_{v10}^* \left(\frac{v_0^*}{v_{10}^*} \right)^3 \times \\ & \quad \times \exp \left[\frac{h}{kT_0} \left(\frac{v_{10}^*}{L_{10}} - \frac{v_0^*}{L_0} \right) \right] I_{v10}^* (\bar{l}_{10}^*) = \\ & = \int_{(V_{E0})} dV_{E0} F(\bar{p}_0) \frac{E_0}{c} \int_{(v_{10}, \bar{l}_{10})} d\sigma_{v10} \left(\frac{v_0}{v_{10}} \right)^3 \times \\ & \quad \times \exp \left[\frac{h}{kT_0} (v_{10} - v_0) \right] I_{v10} (\bar{l}_{10}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

В левой части соотношения (3.31) записан интегральный столкновительный член из (3.26) в с. о. K_0^* , движущейся со скоростью $\bar{\beta}_0$ относительно с. о. K_0 . Необходимую нам связь можно получить, если использовать в (3.31) наряду со свойствами инвариантности $F(\bar{p}_0)$, dV_{E0} инвариантные соотношения (1.33), (3.30):

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= E_0^* L_{e0}; L_{e0} = \theta_0 (1 - \bar{\beta}_0 \bar{\beta}_{e0}) = 1/\theta_0 (1 + \bar{\beta}_0 \beta_{e0}^*); \\ (v_0/v_{10})^3 &= (v_0^*/v_{10}^*)^3 (L_{10}/L_0)^3; I_{v10} = I_{v10}^*/L_{10}^3, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

где введена еще скорость электронов в обеих с. о.: $\bar{\beta}_{e0}$ и $\bar{\beta}_{e0}^* \equiv \equiv 0$. В результате найдем искомое соотношение

$$d\sigma_{v10} = d\sigma_{v10}^* L_0 L_{e0} = d\sigma_{v10}^* (1 - \bar{\beta}_0 \bar{l}_0). \quad (3.33)$$

Эта формула была получена еще Паули [20].

§ 15. Учет эффектов комптоновского рассеяния в уравнениях РРГД. Вычисление компонент вектора обмена энергией — импульсом излучения с веществом

Займемся подробнее членами рассеяния. Члены J_-^σ и J_+^σ , описывающие соответственно, выбывание фотонов из пучка $(v_0, \bar{l}_0)$ и фотоны, вошедшие в этот пучок, с учетом связей (3.30), (3.33) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} J_-^\sigma &= -I_{v0}(\bar{l}_0) \int_{(\bar{p}_0)} f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 (1 - \bar{\beta}_0 \bar{l}_0) \int_{(v_{10}^*, \bar{l}_{10}^*)} d\sigma_{v10}^*; \\ J_+^\sigma &= \int_{(\bar{p}_0)} f(\bar{p}_0) d\bar{p}_0 \int_{(v_{10}^*, \bar{l}_{10}^*)} d\sigma_{v10}^* (1 - \bar{\beta}_0 \bar{l}_0) \times \\ &\times \left(\frac{v_0}{v_{10}} \right)^3 I_{v10}(\bar{l}_{10}) \exp[h_e(v_{10} - v_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Для интегрирования этих выражений, удобно использовать вспомогательные формулы векторного интегрирования по телесному углу, полученные в работе [13]. Предварительно сделаем некоторые замечания.

В членах, описывающих комптон-эффект и характеризующихся наличием множителя $h_e v_0$, точных вычислений провести не удастся, и это ограничение, видимо, принципиально. Поэтому все последующие вычисления основываются на предположении об одинаковой малости величин $h_e v_0$ и β_0^2 (т. е. учтем, что $h\bar{v}_0 \sim \sim kT_0$), что соответствует пренебрежению величинами порядка $x^{-3/2} = (kT_0/m_e c^2)^{3/2}$ и выше. В связи с этим пренебрегается членами вида $h_e v_0 \beta_0$, $(h_e v_0)^2$, $h_e v_0 x \beta_0^3$ и т. п. и не делается различия между $h_e v_0$ и $h_e v_0^*$. Вычисления же в членах, не содержащих множитель $h_e v_0$, удастся провести точно.

Ограничиваясь членами первого порядка малости по параметру $h_e v_0$, произведем интегрирование в члене J_-^σ по частоте dv_{10}^* и нормированному телесному углу $d\bar{l}_{10}^*$ рассеянных фотонов. С учетом (3.29) для сечения рассеяния из нормировки функции распределения получаем

$$\begin{aligned} J_-^\sigma &\approx -\sigma_T I_{v0}(\bar{l}_0) \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 dp_0 \int_{(\bar{n}_0)} d\bar{n}_0 (1 - 2h_e v_0) = \\ &= -\sigma_T N_0 (1 - 2h_e v_0) I_{v0}(\bar{l}_0), \end{aligned}$$

откуда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} J_-^\sigma d\bar{l}_0 &= -\sigma_T N_0 J_0 + 2\sigma_T N_0 h_e \int_0^\infty v_0 J_{v0} dv_0; \\ \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} \bar{l}_0 J_-^\sigma d\bar{l}_0 &= -\sigma_T N_0 \bar{S}_0 + \\ + 2\sigma_T N_0 h_e \int_0^\infty v_0 \bar{S}_{v0} dv_0. \end{aligned} \right\} (3.35)$$

Получение угловых моментов от второго члена рассеяния J_+^σ существенно сложнее (приведено в работе [13]). В результате аналогичного интегрирования из формул работы [13] находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} J_+^\sigma d\bar{l}_0 &= \sigma_T \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 dp_0 \int_0^\infty dv_0 J_{v0} \times \\ &\times \left[\theta_0^2 \left(1 + \frac{\beta_0^2}{3} \right) + 3h_e v_0 - 2h_e v_0 x \beta_0^2 \right]; \\ \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} \bar{l}_0 J_+^\sigma d\bar{l}_0 &= \sigma_T \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 dp_0 \int_0^\infty dv_0 \bar{S}_{v0} \times \\ &\times \left[-\frac{2}{3} \beta_0^2 \theta_0^2 - \frac{6}{5} h_e v_0 + \frac{4}{5} h_e v_0 x \beta_0^2 \right]. \end{aligned} \right\} (3.36)$$

Для проведения интегрирования по импульсу электронов p_0 необходимо предварительно выразить скорость β_0 через p_0 по формуле $\beta_0 = p_0 / \sqrt{1 + p_0^2}$. Используя определение (3.28) функций Макдональда, можно найти следующие интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 dp_0 &= N_0; \int_0^\infty \frac{f(p_0) p_0^2 \beta_0^2}{1 - \beta_0^2} dp_0 = \int_0^\infty f(p_0) p_0^4 dp_0 = \\ &= N_0 \frac{3}{x} \frac{K_3(x)}{K_2(x)}; \\ \int_0^\infty \frac{f(p_0) p_0^2}{1 - \beta_0^2} dp_0 &= \int_0^\infty f(p_0) p_0^2 (1 + p_0^2) dp_0 = \\ &= N_0 \left[1 + \frac{3}{x} \frac{K_3(x)}{K_2(x)} \right]. \end{aligned} \right\} (3.37)$$

Использованные ранее приближения позволяют в этих результатах ограничиться только членами порядка x^{-1} , т. е. в (3.37) можно положить $K_3(x)/K_2(x) \approx 1$.

В результате интегрирования по p_0 в выражениях (3.36) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} d\bar{l}_0 J_+^\sigma &= \sigma_T N_0 \left[1 + \frac{4}{x} - 3h_e \int_0^\infty v_0 J_{v0} dv_0 \right]; \\ \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} \bar{l}_0 J_+^\sigma d\bar{l}_0 &= \sigma_T N_0 \left[-\frac{2}{x} \bar{S}_0 + \frac{6}{5} h_e \int_0^\infty v_0 \bar{S}_{v0} dv_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Объединив (3.38) с формулами для J_-^σ , получим следующие выражения для компонент 4-вектора q_0^s обмена энергией — импульсом между фотонами и электронами вследствие комптоновского рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} q_{40}^s &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} J^\sigma d\bar{l}_0 = \frac{\sigma_0}{x} \left[4J_0 - \frac{h_e}{kT_0} \int_0^\infty v_0 J_{v0} dv_0 \right]; \quad \sigma_0 = \\ &= \sigma_T N_0; \\ q_{10}^s &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty dv_0 \int_{(\bar{l}_0)} l_{10} J^\sigma d\bar{l}_0 = -\sigma_0 \left[S_0 \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{5} \frac{h_e}{kT_0} \int_0^\infty v_0 S_{v0} dv_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

При $h_e v_0 = 0$ на основе (3.38) можно получить формально точные релятивистские формулы для прямого комптон-эффекта в томсоновском приближении:

$$\begin{aligned} q_{40}^{sT} &= \sigma_0 J_0 (4/x) K_3(x)/K_2(x); \quad q_{10}^{sT} = \\ &= -\sigma_0 S_0 [1 + (2/x) K_3(x)/K_2(x)]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Поскольку при этом не учитывается обратный комптон-эффект, то в с. с. существует обмен не только импульсом, но и энергией, в результате чего для фотонов в этом приближении не может быть достигнуто равновесное состояние (даже при учете эффектов поглощения). Используя результаты для компонент полного 4-вектора $\bar{q}_0$ обмена энергией — импульсом, получаем:

$$q_{40} = \alpha_p (B_0^* - J_0) + 4\sigma_0 \left(\frac{kT_0}{m_e c^2} \right) J_0 - \sigma_0 \frac{h}{m_e c^2} \int_0^\infty \nu_0 J_{\nu_0} d\nu_0; \quad (3.41)$$

$$q_{10} = -\kappa_R S_0 - 2\sigma_0 \left(\frac{kT_0}{m_e c^2} \right) S_0 + \frac{16}{5} \sigma_0 \frac{h}{m_e c^2} \int_0^\infty \nu_0 S_{\nu_0} d\nu_0.$$

Отсюда видно, что члены порядка $kT_0/m_e c^2 \sim h\bar{\nu}_0/m_e c^2$ ($h\bar{\nu}_0$ — некоторая средняя энергия фотона), связанные с комптоновским рассеянием, играют важную роль в обмене энергией, обеспечивая установление равновесного распределения (для которого, однако, в приближении ЛТР требуется наличие хотя бы малого поглощения), и имеют характер малых поправок в обмене импульсом.

В л. с. 4-вектор обмена $\bar{q}$ получается по формулам перехода, аналогичным (3.11), однако в этих формулах следует использовать не только точные связи (1.7) для компонент тензора энергии-импульса излучения в разных системах отсчета, но и приближенные — для нужных интегралов от спектральных моментов интенсивности:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \nu_0 J_{\nu_0} d\nu_0 &\approx \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu - 3\beta \int_0^\infty \nu S_\nu d\nu; \\ \int_0^\infty \nu_0 S_{\nu_0} d\nu_0 &\approx \int_0^\infty \nu S_\nu d\nu - 2\beta \int_0^\infty \nu K_\nu d\nu - \beta \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

которые справедливы с точностью до β^2 и получаются на основе соотношений (3.30). В результате для компонент 4-вектора $\bar{q}$ с точностью до членов первого порядка по малым параметрам β и $h\bar{\nu}/m_e c^2$ будем иметь:

$$q_4 \approx -(\alpha_p + \sigma_0) (J - \beta S) + \alpha_p B_0^* + \sigma_0 [J - 2\beta S + \beta^2 K] + \\ + 4\sigma_0 J \frac{k}{m_e c^2} \left[T - \frac{h}{4kJ} \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu \right]; \quad (3.43)$$

$$q_1 \approx -(\alpha_p + \sigma_0) (S - \beta K) + \alpha_p \beta B_0^* + \sigma_0 \beta [J - 2\beta S + \beta^2 K] - \\ - 2\sigma_0 [S - \beta (J + K)] \frac{k}{m_e c^2} \left[T - \frac{8}{5} \frac{h}{kS_0} \int_0^\infty \nu S_\nu d\nu \right]. \quad (3.44)$$

Присутствующие здесь члены порядка β^2 (и выше) сохранены только для того, чтобы точно выполнялись необходимые равновесные соотношения в с. с.:

$$J_0 = B_0^*; \quad S_0 = 0; \quad K_0 = \frac{1}{3} B_0^*. \quad (3.45)$$

Из (1.7) имеют место следующие связи:

$$\left. \begin{aligned} J &= \theta^2 (J_0 + 2\beta S_0 + \beta^2 K_0); & J_0 &= \theta^2 (J - 2\beta S + \beta^2 K); \\ S &= \theta^2 [S_0 (1 + \beta^2) + \beta (J_0 + K_0)]; & S_0 &= \theta^2 [S (1 + \beta^2) - \beta (J + K)]; \\ K &= \theta^2 (K_0 + 2\beta S_0 + \beta^2 J_0); & K_0 &= \theta^2 (K - 2\beta S + \beta^2 J). \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Здесь сохранены члены порядка β^2 в связи с тем, что априори неизвестно соотношение независимых величин J , S , K и J_0 , S_0 , K_0 между собой. Выражения (3.43), (3.44) после пренебрежения последними членами, которые имеют смысл обмена энергией и импульсом в комптоновском случае вследствие эффекта некогерентности рассеяния, совпадают с правыми частями уравнений (3.12), записанных тоже в галилеевском приближении (опять с точностью до усреднений по энергиям фотонов).

§ 16. Условия замыкания уравнений РРГД. Галилеевское приближение

Уравнения моментов, полученные в данной главе, в отличие от уравнений, выведенных в гл. 2 для условий, близких к ЛТР, справедливы для произвольных неравновесных условий. Однако они, как отмечалось ранее, справедливы только в отсутствие эффектов индуцированного излучения, которыми было пренебрежено в столкновительных членах рассеяния. Кроме того, одних уравнений (3.12) (томсоновское рассеяние) или уравнений (3.43), (3.44) (комптоновское рассеяние) явно недостаточно для определения всех входящих в них неизвестных функций. В самом деле, в два уравнения (3.12) входят три неизвестные функции J , S и K , а в уравнениях (3.43), (3.44) присутствуют, кроме того еще два интегральных момента по спектру: $\int_0^\infty \nu J_\nu d\nu$ и $\int_0^\infty \nu S_\nu d\nu$. В

этом проявляется общая проблема появления лишних моментов при интегрировании уравнения Больцмана, которая была нами затронута в гл. 2. Выше при вычислении конкретных выражений для компонент вектора обмена энергией — импульсом $\bar{q}$ было продемонстрировано, что только в простейшем случае томсоновского рассеяния удастся избежать появления новых неизвестных функций, в то время как для комптоновского рассеяния все же появляются два указанных ранее момента. Следует отметить, что введением усредненных коэффициентов поглощения в § 14 удалось избежать появления дополнительных моментов также и в членах поглощения, которые в противном случае, без усреднения, неизбежно возникают. Поэтому в уравнениях (3.43), (3.44) мы используем процедуру усреднения, аналогичную примененной в § 14.

С целью усреднения примем для функции распределения простейшую форму закона Вина, так что $J_\nu \sim \nu^3 \exp(-h\nu/kT_r)$, где параметр T_r — «температура излучения». При этом получается следующая связь: $J = 3K = aT_r^4$ ($90/\pi^4$). Тогда для лиш-них спектральных моментов можно найти выражения:

$$\frac{h}{kJ} \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu = 4T_r; \quad \frac{h}{kS} \int_0^\infty \nu S_\nu d\nu = 5T_r.$$

При выводе последнего выражения следует учесть, что формально $S_\nu = S = 0$, и поэтому необходимо раскрыть неопределенность. Поскольку, строго говоря, предположение о справедливости закона Вина относится к с. с., то на основе соотношений (3.42) можно получить: $\int_0^\infty \nu S_\nu d\nu = 2\beta \int_0^\infty \nu K_\nu d\nu + \beta \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu =$
 $= \frac{5}{3} \beta \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu$ и соответственно $S = (4/3)\beta J$. Таким образом, второй дополнительный интегральный момент можно выразить через первый, а тем самым через температуру излучения T_r . После такого усреднения выражения для членов комптоновского рассеяния в (3.43), (3.44), связанные с некогерентным характером обмена энергией—импульсом, оказываются пропорциональны следующим выражениям:

$$T - \frac{h}{4kJ} \int_0^\infty \nu J_\nu d\nu = T - T_r; \quad T - \frac{8h}{5kS} \int_0^\infty \nu S_\nu d\nu = T - 8T_r;$$

$$T_r^4 = \left(\frac{\pi^4}{30} \right) \left(\frac{K}{a} \right). \quad (3.47)$$

Отметим, что не случайно член обмена энергией обращается в нуль при $T = T_r$, поскольку процессы рассеяния ведут к установлению именно виновского распределения (а при учете членов индуцированного излучения — бозе-эйнштейновского распределения, см. гл. 5). В обмене импульсом фигурирует более сложная зависимость, но соответствующий член обращается в нуль при установлении равновесия за счет выражения $(S - 4\beta K)$. Заметим, что в формуле (3.47) температуру излучения T_r в равной степени можно связать с любым из двух моментов J или K .

В результате учета (3.47) случай комптоновского рассеяния формально сводится к случаю томсоновского рассеяния. Остается общая проблема установления необходимого условия замыкания уравнений РРГД, поскольку в двух уравнениях фигурируют три неизвестные функции J , S и K . Сразу отметим, что полностью удовлетворительного решения указанной проблемы не существует, как это хорошо известно в обычных нерелятивистских задачах о переносе излучения [32], в которых из самых раз-

личных возможностей отобрано, по всей вероятности, наиболее подходящее условие замыкания, названное приближением Эддингтона,

$$J = 3K. \quad (3.48)$$

Это приближение точно оправдано при изотропном угловом распределении излучения, а также при аппроксимации неизо- тропного распределения распределением «вперед—назад», ко- торое состоит из двух полусферических распределений по телес- ному углу. При релятивистских скоростях движения вещества можно сохранить приближение Эддингтона (3.48), но возникает альтернатива, в какой системе отсчета его постулировать—лабо- раторной или собственной. По-видимому, целесообразно приве- сти наряду с уравнением (3.48), которое относится к л. с., при- ближение Эддингтона и в с. с.:

$$J_0 = 3K_0. \quad (3.49)$$

Какое из приближений применять, (3.48) или (3.49), должно за- висеть от конкретной физической задачи РРГД. Согласно общим соотношениям (3.46), получим из (3.49) в отличие от (3.48) сле- дующее соотношение, справедливое при любых β :

$$J = 3K (1 - \beta^2/3) / (1 - 3\beta^2) - 4\beta S / (1 - 3\beta^2), \quad (3.50)$$

которое совпадает с (3.48) только при $\beta = 0$. Напомним, что при выводе (3.50), как и во всей этой главе, мы имели в виду одно- мерный плоский случай.

Для практических приложений запишем систему уравнений для моментов S и K в галилеевском приближении. Для этой це- ли используем уравнения моментов (3.12), где в левых частях сделаем подстановку для момента J из условия замыкания (3.48). Далее выражения для компонент вектора обмена энергией и им- пульсом заимствуем из (3.43) и (3.44) [соответственно для q_4 и q_1 в правых частях уравнений (3.12)], причем в членах некоге- рентного обмена энергией и импульсом используем соотношения (3.47). Тогда получим следующую систему уравнений для сфе- рически-симметричного случая, справедливую в галилеевском приближении:

$$3\partial K/\partial\tau + \partial S/\partial r + 2S/r = -(\alpha_p + \sigma_0)(3K - \beta S) + \alpha_p B_0^* + \\ + \sigma_0(3K - 2\beta S + \beta^2 K) + 12\sigma_0 K (k/m_e c^2) (T - T_r); \quad (3.51)$$

$$\partial S/\partial\tau + \partial K/\partial r = -(\alpha_p + \sigma_0)(S - \beta K) + \beta\alpha_p B_0^* + \\ + \beta\sigma_0(3K - 2\beta S + \beta^2 K) - 2\sigma_0(S - 4\beta K) (k/m_e c^2) (T - 8T_r); \quad (3.52)$$

$$T_r^4 = (\pi^4/30) (K/a). \quad (3.53)$$

Из уравнений (3.51)—(3.53) полностью определяются неизвестные функции S , K и T_r . Конечно, нельзя забывать, что при выводе

их были использованы усреднение коэффициента поглощения α'_ν , а также усреднение (3.47) для комптоновских членов некогерентного обмена энергией и импульсом. Наконец, условие замыкания (3.48) завершает всю серию приближений, которые были использованы при выводе уравнений (3.51)—(3.53). Вместе с законами сохранения энергии и импульса, выведенными в гл. 2, и уравнением непрерывности они составляют полную систему дифференциальных уравнений РРГД, описывающую в отличие от системы, приведенной в гл. 2, любой неравновесный гидродинамический процесс взаимодействия излучения с веществом. Галилеевское приближение, в котором получены эти уравнения, несомненно, является наиболее важным в различных физических приложениях РРГД. Особенно важны эти уравнения для достаточно разреженных газов, где энергия и давление излучения становятся сравнимыми с энергией и давлением газа при сравнительно низких нерелятивистских температурах.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Более общий случай движения вещества с переменной скоростью требует введения вместо инерциальной собственной системы отсчета (и. с. с.) более общей, неинерциальной (сопутствующей) системы отсчета (н. с.). Такие системы вводятся различными исследователями по-разному, на основе различных соображений как физического характера, так и формального удобства. На наш взгляд, наиболее естественно использовать такое определение н. с., для которой связь между введенными в ней координатами и координатами л. с. дается локальными преобразованиями Лоренца (1.3) для дифференциалов координат. При таком определении в предельном случае движения вещества с постоянной скоростью получаются уравнения, справедливые для специальной теории относительности (СТО).

§ 17. Определение сопутствующей системы отсчета.

Введение подвижного репера.

Перенос репера вдоль мировой линии

Будем считать, что в некоторый фиксированный момент времени н. с. совпадает с и. с. с., движущейся относительно л. с. в каждой локальной точке (x^α, τ) с 4-скоростью $\bar{u}$, определяемой формулами (1.2).

Частица вещества, являющаяся полюсом н. с., в этот момент времени покоится относительно данной системы, так что 4-скорость $\bar{u}_0$ дается значениями $u_0^\alpha = 0$, $u_0^4 = 1$. Однако в том слу-

чае, когда 4-скорость $\bar{u}$ не постоянна, для частицы, движущейся с этой скоростью, отлична от нуля величина 4-ускорения $\bar{b}$, определенного известным соотношением (см., например [21]): $\bar{b} = d\bar{u}/ds = b\bar{B}$. Здесь ds — элемент длины мировой линии, определяемый выражением для интервала (1.1); b — абсолютная величина 4-ускорения, имеющая смысл главной кривизны мировой линии частицы, $\bar{B}$ — единичный пространственно-подобный 4-вектор главной нормали к мировой линии, ортогональный 4-скорости $\bar{u}$: $(\bar{B}\bar{B}) = -1$; $(\bar{u}\bar{B}) = 0$. Используя 4-векторы скорости и ускорения $\bar{u}$ и $\bar{B}$, можно ввести 4-репер н. с. следующим образом.

Выберем в качестве орта $\bar{e}_{40}$ — времениподобный 4-вектор $\bar{u}$, в качестве орта $\bar{e}_{10}$ — пространственно-подобный 4-вектор $\bar{B}$, а в качестве ортов $\bar{e}_{20}, \bar{e}_{30}$ — некоторые единичные пространственно-подобные 4-векторы $\bar{w}, \bar{q}$, ортогональные как друг другу, так и векторам $\bar{u}, \bar{B}$. Эти векторы $\{\bar{B}, \bar{w}, \bar{q}, \bar{u}\}$ образуют подвижный 4-репер $\{\bar{e}_{i0}\}$.

Потребуем, чтобы вдоль мировой линии частицы репер $\{\bar{e}_{i0}\}$ испытывал только «жесткое вращение», т. е. чтобы сохранялось свойство ортонормированности реперных векторов. Приведенное выше выражение для 4-ускорения $\bar{b}$ обеспечивает сохранение нормы вектора $\bar{u}$. В самом деле, имеем: $d(\bar{u}\bar{u})/ds = 2(\bar{u}d\bar{u}/ds) = 2(\bar{u}\bar{b}) = 2b(\bar{u}\bar{B}) = 0$. Требование сохранения нормировки остальных реперных векторов приводит к некоторым выражениям для их производных вдоль мировой линии, которые не включают компонент, пропорциональных самому этому вектору. Например, для вектора $\bar{B}$ из требования $d(\bar{B}\bar{B})/ds = 2\bar{B}d\bar{B}/ds = 0$ следует, что выражение для $d\bar{B}/ds$ должно представлять собой линейную комбинацию вида $d\bar{B}/ds = k_1\bar{w} + k_2\bar{q} + k_3\bar{u}$. Условие сохранения ортогональности всех реперных векторов дает вполне определенные связи между полученными таким образом коэффициентами. В частности, из условия сохранения ортогональности $\bar{u}$ и $\bar{B}$ следует, что коэффициент $k_3 = b : d(\bar{u}\bar{B})/ds = (\bar{B}d\bar{u}/ds) + (\bar{u}d\bar{B}/ds) = b(\bar{B}\bar{B}) + k_3(\bar{u}\bar{u}) = -b + k_3 = 0$. Таким образом, выражение для изменения реперного вектора $\bar{B}$, например, окажется следующим: $d\bar{B}/ds = a\bar{w} + c\bar{q} + b\bar{u}$. Здесь члены с векторами $\bar{w}, \bar{q}$ описывают пространственное вращение 3-репера $\{\bar{B}, \bar{w}, \bar{q}\}$, а члены с 4-скоростью $\bar{u}$ — эффекты, связанные с ускорением частицы. Такие общие формулы для изменения реперных векторов носят название формул Френе—Серре. Если дополнительно потребовать отсутствия пространственного вращения 3-репера при движении частицы вдоль мировой линии, то это приведет к условиям $a = c = 0$, которые по отме-

ченным выше соотношениям симметрии между коэффициентами означают параллельный перенос ортов $\bar{e}_{20}, \bar{e}_{30} : d\omega/ds = 0, d\bar{q}/ds = 0$. В указанном случае рассматриваемое движение частицы одномерно и происходит в плоскости (x^1, τ) . Тогда из условия ортогональности $(\bar{u} \bar{B}) = 0$, выражений для компоненты 4-скорости (1.3) и нормы $(\bar{B} \bar{B}) = -1$ можно однозначно получить для компонент 4-вектора $\bar{B}$ выражения:

$$B^1 = u^4 = \theta; B_1 = -\theta; B^4 = u^1 = \beta\theta; B_4 = \beta\theta; \theta = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (4.1)$$

Формулы изменения 4-векторов касательной $\bar{u}$ и нормали $\bar{B}$ к мировой линии частицы при этом будут даваться следующими формулами, полученными ранее Ферми [33]:

$$d\bar{u}/ds = b\bar{B}; d\bar{B}/ds = b\bar{u}; (\bar{u} d\bar{u}/ds) = (\bar{B} d\bar{B}/ds) = 0. \quad (4.2)$$

Эти формулы показывают, что при движении частицы вдоль мировой линии с ускорением $\bar{b}$, отличным от нуля, изменение касательной направлено по нормали, а изменение нормали — по касательной. Только при таком изменении компонент 4-скорость $\bar{u}$ и в дальнейшем остается касательной к мировой линии, а 4-вектор $\bar{B}$ — ее главной нормалью.

Таким образом, одним из существенных свойств н. с. является то, что реперы $\{\bar{e}_{i0}\}$ в различных точках мировой линии различны.

§ 18. Определение пространства синхронизации

Для того чтобы полностью определить н. с. не только вдоль некоторой окрестности мировой линии одной частицы, но и во всем пространственном «слое», следует определить некоторое правило выделения событий, которые могли бы считаться одновременными с событием в данной мировой точке, т. е. определить правило синхронизации с полюсом н. с. При переносе репера $\{\bar{e}_{i0}\}$ вдоль мировой линии частицы пространственные координаты x_0^i событий относительно подвижного репера были зафиксированы и менялись только координаты «собственного» времени, связанные с длиной мировой линии частицы ds .

В самом деле, раскрывая оператор d/ds как производную по направлению 4-скорости и используя определение 4-скорости (1.2), а также формулы (1.4), (1.6), получаем

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d\tau}{ds} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} = (e_{40})^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \quad (4.3)$$

Поэтому для установления процедуры синхронизации можно аналогично определить производную по направлению 4-вектора

ускорения (или, что то же — по направлению главной нормали к мировой линии):

$$d/dv = (e_{10})^k \partial/\partial x^k = B^k \partial/\partial x^k = \partial/\partial x_0^1, \quad (4.4)$$

где $dv = dx_0^1$ — мера длины, введенная на пространственно-подобной линии с одинаковым числовым значением координаты τ_0 — линии синхронизации.

По аналогии с правилами (4.2) целесообразно потребовать, чтобы при переходе к «соседним» частицам, синхронизированным с «полюсом» н. с., сохранились нормы и ортогональность реперных векторов $\bar{u}$, $\bar{B}$:

$$\frac{d\bar{u}}{dv} = D\bar{B}; \quad \frac{d\bar{B}}{dv} = D\bar{u}; \quad \left(\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dv}\right) = \left(\bar{B} \frac{d\bar{B}}{dv}\right) = 0. \quad (4.5)$$

Здесь D — кривизна линии синхронизации, которая играет ту же формальную роль, что и кривизна b мировой линии в формулах (4.2).

§ 19. Формулы связи между компонентами 4-ускорения в различных системах.

Обобщение определения сопутствующей системы

Формулы (4.2) и (4.5) (в дальнейшем мы их будем называть формулами Ферми), лежащие в основе определения н. с. (сопутствующей), можно получить независимым способом, причем при этом для введенных параметров b и D получаются явные выражения. Этот способ основан на применении локальных преобразований Лоренца (1.4) к дифференциалам 4-скоростей $\bar{u}$ и $\bar{u}_0$.

В рассматриваемом нами лабораторном плоском пространстве—времени дифференциал 4-скорости $d\bar{u}$ так же, как и дифференциал произвольного 4-вектора, является 4-вектором. Однако для н. с., в которых реперы $\{\bar{e}_{i0}\}$ в различных точках различны, ковариантный дифференциал произвольного 4-вектора $\delta\bar{A}_0$ будет также 4-вектором только в том случае, если он составлен из двух частей: «обычного» дифференциала $d\bar{A}_0$, вычисляемого в предположении, что реперы $\{\bar{e}_{i0}\}$ в соседних точках не отличаются друг от друга, и дополнительного изменения компонент 4-вектора $\bar{A}_0$, связанного только с отличием репера $\{\bar{e}'_{i0}\}$ в соседней точке от репера $\{\bar{e}_{i0}\}$ в той точке, относительно которой вычисляется дифференциал. Реперные векторы $\{\bar{e}_{i0}\}$ отличаются от остальных 4-векторов лабораторного пространства—времени тем, что их дифференциалы включают только изменения второго типа. Обозначив эти изменения обычным образом как «дифференциалы» $d\bar{u}_0$, $d\bar{B}_0$ и учитывая на основе вышесказанного, что они представляют собой 4-векторы, найдем [в соответствии с

(1.4)] для связей компонент этих дифференциалов в фиксированной и н. с. соотношения:

$$\begin{aligned} du_0^i &= (e_0^i)_m du^m; \quad du^i = (e_{m0})^i du_0^m; \quad dB_0^i = (e_0^i)_m dB^m; \\ dB^i &= (e_{m0})^i dB_0^m. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Раскрывая эти соотношения на основе формул (1.6) для дифференциалов 4-скорости, в частности, получаем:

$$\left. \begin{aligned} du_0^1 &= u_4 du^1 + u_1 du^4; \quad du_0^4 = u_1 du^1 + u_4 du^4; \\ du^1 &= u_4 du_0^1 - u_1 du_0^4; \quad du^4 = -u_1 du_0^1 + u_4 du_0^4. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

На основе тех же свойств (1.4) можно написать следующие связи для производных в обеих системах координат:

$$\frac{\partial}{\partial x_0^i} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x_0^i} \right) = (e_{i0})^m \frac{\partial}{\partial x^m}; \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = (e_0^m)_i \frac{\partial}{\partial x_0^m}. \quad (4.8)$$

Для рассматриваемого одномерного случая эти соотношения из (1.2) и (1.6) раскрываются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0^1} &= (e_{10})^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + (e_{10})^4 \frac{\partial}{\partial \tau} = \\ &= \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta \theta \frac{\partial}{\partial \tau} = u^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial}{\partial \tau_0} &= (e_{40})^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + (e_{40})^4 \frac{\partial}{\partial \tau} = \\ &= \beta \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \theta \frac{\partial}{\partial \tau} = u^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + u^4 \frac{\partial}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial}{\partial x^1} &= (e_0^1)_1 \frac{\partial}{\partial x_0^1} + (e_0^4)_1 \frac{\partial}{\partial \tau_0} = \\ &= \theta \frac{\partial}{\partial x_0^1} - \beta \theta \frac{\partial}{\partial \tau_0} = u_4 \frac{\partial}{\partial x_0^1} + u_1 \frac{\partial}{\partial \tau_0}; \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= (e_0^1)_4 \frac{\partial}{\partial x_0^1} + (e_0^4)_4 \frac{\partial}{\partial \tau_0} = \\ &= -\beta \theta \frac{\partial}{\partial x_0^1} + \theta \frac{\partial}{\partial \tau_0} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_0^1} + \\ &+ u_4 \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Из соотношений (4.7), (4.9) после несложных преобразований с учетом требования сохранения нормы 4-вектора $\bar{u}$ в форме $u^4 \nabla u^4 = u^1 \nabla u^1$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0^4}{\partial \tau_0} &= 0; \quad \frac{\partial u_0^4}{\partial x_0^1} = 0; \quad \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} = \frac{\partial u^1}{\partial \tau} + \frac{\partial u^4}{\partial x^1}; \\ \frac{\partial u_0^1}{\partial x_0^1} &= \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^4}{\partial \tau}; \end{aligned} \quad (4.10)$$

Совершенно аналогично получаем для обратного преобразования с учетом обращения в нуль двух первых производных в (4.10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^4}{\partial \tau} &= -(u^1)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial x_0^1} + u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}; & \frac{\partial u^4}{\partial x^1} &= u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial x_0^1} - (u^1)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}; \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tau} &= -u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial x_0^1} + (u^4)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}; & \frac{\partial u^1}{\partial x^1} &= (u^4)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial x_0^1} - u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Из этих соотношений уже непосредственно следуют формулы Ферми (4.2). С учетом (4.1) записываем: $du^1/ds = u^4 \partial u^1 / \partial \tau + u^1 \partial u^1 / \partial x^1 = bB^1 = bu^4$; $\beta = u^1/u^4$, откуда с учетом (4.11) получаем выражение для b :

$$b = \frac{\partial u^1}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial u^1}{\partial x^1} = \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} = \Theta^3 (\dot{\beta} + \beta \beta'); \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \tau}; \quad \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial x^1}. \quad (4.12)$$

Аналогичным образом можно получить формулы (4.5) и выражение для D :

$$D = \Theta^3 (\beta' + \beta \dot{\beta}). \quad (4.13)$$

Формулы (4.10), (4.12), (4.13) помогают объяснить сложный характер ковариантного дифференциала du_0 , а именно, эти соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \partial u_0^4 / \partial \tau_0 &= 0; & \partial u_0^4 / \partial x_0^1 &= 0; \\ \partial u_0^1 / \partial \tau_0 &= b; & \partial u_0^1 / \partial x_0^1 &= D \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

можно представить в виде:

$$du_0^i = \gamma^i_{.mn} u_0^m dx_0^n = \gamma^i_{.4n} dx_0^n, \quad (4.15)$$

где $\gamma^1_{.44} = b$; $\gamma^1_{.41} = D$; $\gamma^4_{.4n} = 0$. Коэффициенты $\gamma^i_{.mn}$, входящие в (4.15), носят название коэффициентов вращения Риччи, поскольку они входят в формулы Френе—Серре, описывающие жесткое вращение подвижного 4-репера $\{\bar{e}_{i0}\}$. Они определяются более общим, чем (4.15), выражением $d(e_{p0})^i = \gamma^i_{.mn}(e_{p0})^m dx_0^n$. В н.с. эти коэффициенты играют ту же роль, что и символы Кристоффеля в криволинейных с. к., имеющие очень важное значение для искривленного пространства — времени ОТО [14, 15, 21, 22, 34].

Для рассматриваемого одномерного случая, при котором в силу соотношений (4.1) компоненты B^i выражаются через u^i , полученные выше формулы полностью определяют также и производные от другого реперного вектора $\bar{B}_0$, производные же от остальных реперных векторов $\bar{\omega}$, $\bar{q}$, как указывалось ранее, бу-

дуг равны нулю. Таким образом, нам известны производные от компонент всех реперных векторов $\{e_{m0}\}^i$ и это позволяет получить уравнение для моментов функции распределения частиц в н. с. на основе интегрирования уравнения Больцмана.

§ 20. Получение уравнений моментов в сопутствующей системе отсчета на основе уравнения Больцмана

Релятивистски-ковариантное уравнение Больцмана дается формулой (1.45):

$$P_0^i \partial F_0 / \partial x_0^i = P_0^4 dF_0 / d\tau_0 \Big|_{\text{ст}}. \quad (4.16)$$

Вектор 4-импульса $\bar{P}$ выражается через его компоненты в н.с. по формулам (1.7) обычным образом:

$$P^i = P_0^m (e_{m0})^i; \quad P_0^m = P^i (e_0^m)_i. \quad (4.17)$$

Напомним, что важной особенностью 4-вектора $\bar{P}$, связанной с допущением о локальном характере учитываемых взаимодействий, является то, что его компоненты можно вносить под знак дифференцирования по координатам как л. с., так и н. с. В то же время 4-вектор P_0 таким свойством не обладает. Поэтому для н. с. уравнения моментов функции распределения можно получать следующими действиями: выразить P_0^i через P^k , внести P^k под знак дифференцирования, а затем выразить P^k через P_0^i . Таким образом, находим из (4.16):

$$\begin{aligned} P_0^i \frac{\partial F_0}{\partial x_0^i} &= P^k (e_0^i)_k \frac{\partial F_0}{\partial x_0^i} = (e_0^i)_k \frac{\partial (F_0 P^k)}{\partial x_0^i} = \\ &= (e_0^i)_k \frac{\partial}{\partial x_0^i} [F_0 P_0^m (e_{m0})^k] = \frac{\partial}{\partial x_0^i} (F_0 P_0^i) + F_0 P_0^m (e_0^i)_k \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x_0^i} (e_{m0})^k = P_0^4 \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Как видно отсюда, в н. с. появляется добавочный член в уравнении потока частиц, связанный с производными от компонент реперных векторов, вычисленных нами ранее, и для которых наиболее удобно применять формулы Ферми (4.2), (4.5). Умножая (4.18) на инвариантный энергетический объем $dV_{E0} = \frac{g p_0}{ch^3} dE_0 d\omega_{p0}$, и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0^i}{\partial x_0^i} + N_0^m (e_0^i)_k \frac{\partial}{\partial x_0^i} (e_{m0})^k &= \frac{\partial N_0^i}{\partial x_0^i} + N_0^1 \left(u_k \frac{\partial B^k}{\partial \tau_0} - B_k \frac{\partial B^k}{\partial x_0^1} \right) + \\ &+ N_0^4 \left(u_k \frac{\partial u^k}{\partial \tau_0} - B_k \frac{\partial u^k}{\partial x_0^1} \right) = \int_{(V_{E0})} P_0^4 \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} dV_{E0}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Раскрывая это выражение на основе формул Ферми (4.2), (4.5) и свойства ортонормированности репера $\{\bar{e}_{i0}\}$, имеем окончательно

$$\frac{\partial N_0^i}{\partial x_0^i} + b N_0^1 + D N_0^4 = \int_{(V_{E0})} P_0^4 \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} dV_{E0}. \quad (4.20)$$

Добавочные члены, таким образом, учитывают эффекты неинерциальности движения и деформируемости материального континуума.

Аналогичным образом можно получить уравнения для моментов любого порядка от функции распределения. Уравнения для моментов второго порядка выводятся, в частности, следующим образом. Умножая уравнение Больцмана (4.16) на P_k и делая преобразования, аналогичные приведенным выше, получаем:

$$\begin{aligned} P_{i0} P_0^m \frac{\partial F_0}{\partial x_0^m} &= (e_0^m)_n (e_{i0})^k \frac{\partial}{\partial x_0^m} (F_0 P_k P^n) = \\ &= (e_0^m)_n (e_{i0})^k \frac{\partial}{\partial x_0^m} [F_0 P_{r0} P_0^s (e_0^r)_k (e_{s0})^n] = \frac{\partial}{\partial x_0^m} (F_0 P_0^m P_{i0}) + \\ &+ F_0 \left[P_0^m P_{r0} (e_{i0})^k \frac{\partial (e_0^r)_k}{\partial x_0^m} + P_{i0} P_0^s (e_0^m)_n \frac{\partial (e_{s0})^n}{\partial x_0^m} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Умножая (4.21) на инвариантную величину cdV_{E0} и производя интегрирование по энергетическому объему, находим для компонент 4-вектора $\bar{q}_0$ обмена энергией—импульсом и тензора W_{0k}^i энергии—импульса излучения следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= c \int_{(V_{E0})} P_0^4 P_{10} \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} dV_{E0} = \frac{\partial W_{10}^m}{\partial x_0^m} - W_{n0}^m B^k \frac{\partial (e_0^n)_k}{\partial x_0^m} + \\ &+ W_{10}^k (e_0^m)_n \frac{\partial (e_{k0})^n}{\partial x_0^m}; \\ q_{40} &= c \int_{(V_{E0})} P_0^4 P_{40} \frac{dF_0}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} dV_{E0} = \frac{\partial W_{40}^m}{\partial x_0^m} + W_{n0}^m u^k \frac{\partial (e_0^n)_k}{\partial x_0^m} + \\ &+ W_{40}^k (e_0^m)_n \frac{\partial (e_{k0})^n}{\partial x_0^m}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Использование формул Ферми (4.2), (4.5) приводит эти уравнения к виду:

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= \partial W_{10}^4 / \partial \tau_0 + \partial W_{10}^1 / \partial x_0^1 - b (W_{40}^4 - W_{10}^1) - 2D W_{40}^1; \\ q_{40} &= \partial W_{40}^4 / \partial \tau_0 + \partial W_{40}^1 / \partial x_0^1 + D (W_{40}^4 - W_{10}^1) + 2b W_{40}^1. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

В этих формулах использована очевидная тензорная связь $W_{10}^4 = -W_{40}^1$. Для одномерного движения в сферической с. к. необходимо учесть геометрию пространственных координат, что несколько усложняет вычисления. Проводя для этого случая вычисления, аналогичные приведенным выше, вместо (4.23) получаем [16]:

$$\left. \begin{aligned} \partial S_0 / \partial \tau_0 + \partial K_0 / \partial r_0 + (b + 2u^4/r) (J_0 + K_0) + \\ + (2D + 2u^1/r) S_0 - u^4 (J_0 - 3K_0)/r = -q_{10}; \\ \partial J_0 / \partial \tau_0 + \partial S_0 / \partial r_0 + (D + 2u^1/r) (J_0 + K_0) + \\ + (2b + 2u^4/r) S_0 + u^1 (J_0 - 3K_0)/r = q_{40}, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

где использованы обозначения (2.27) и принято $K_0 = -K_{10}^1$; $K_{20}^2 = K_{30}^3 = -(J_0 - K_0)/2$.

§ 21. Вывод уравнений моментов из уравнения переноса излучения

Уравнения моментов (4.24) можно получить и другим способом, который более ясно прослеживает связь получаемых членов уравнения с членами, описывающими релятивистские эффекты Доплера и аберрации. В этом способе опорной функцией является не функция распределения F_{v0} , а интенсивность излучения I_{v0} . Для того, чтобы получить уравнения для 4-вектора потока частиц N_0^i , определенного в (2.1), (2.3), предварительно из релятивистски-ковариантного уравнения Больцмана найдем уравнение для величины (I_{v0}/v_0) , которая входит в определение (2.3).

Из (1.28), (2.2) и (2.3) имеем:

$$\begin{aligned} dV_{v0} P_0^i \frac{\partial F_{v0}}{\partial x_0^i} &= P_0^i \frac{\partial}{\partial x_0^i} (F_{v0} dV_{v0}) = v_0 l_0^i \frac{d}{\partial x_0^i} \left(\frac{I_{v0}}{v_0} dv_0 d\omega_{v0} \frac{1}{v_0} \right) = \\ &= inv = \frac{gv_0^2 dv_0 d\omega_{v0}}{hc^3} \frac{dF_{v0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Используя связь $v_0 = vL$ и тот факт, что величину v (как четвертую компоненты $\bar{P}$) можно выносить из-под знака дифференциала, имеем отсюда выражение

$$\begin{aligned} l_0^i \frac{\partial}{\partial x_0^i} \left(\frac{I_{v0}}{v_0} dv_0 d\omega_{v0} \right) - \left(\frac{l_0^i}{v_0} \frac{\partial v_0}{\partial x_0^i} \right) \left(\frac{I_{v0}}{v_0} dv_0 d\omega_{v0} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_0^i} \left(\frac{I_{v0}}{v_0} l_0^i dv_0 d\omega_{v0} \right) - \left[\frac{1}{L} l_0^i \frac{\partial L}{\partial x_0^i} + \frac{\partial l_0^i}{\partial x_0^i} \right] \times \\ \times \left(\frac{I_{v0}}{v_0} dv_0 d\omega_{v0} \right) = \frac{gv_0^2 dv_0 d\omega_{v0}}{hc^3} \frac{dF_{v0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, нам необходимо получить формулы для изменения частоты и направления движения фотона, что лучше всего сделать, используя формулы Ферми (4.25), (4.5). Для простоты рассмотрим одномерный случай, полагая, что все производные по координатам x_0^2, x_0^3 равны нулю. Поскольку мы определили ранее орты подвижного репера $\{\bar{e}_{i0}\}$ следующим образом: $\bar{e}_{10} = \bar{B}$; $\bar{e}_0^1 = -\bar{B}$; $\bar{e}_{40} = \bar{u}$; $\bar{e}_0^4 = \bar{u}$, то общие формулы (1.32) примут следующий вид:

$$L = u_i l^i; \quad l_0^1 = B_i l^i / L; \quad l_0^4 = 1. \quad (4.27)$$

Отсюда по формулам Ферми (4.2), (4.5) имеем:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial \tau_0 &= l^i \partial u_i / \partial \tau_0 = b l^i B_i = -b L l_0^1; \\ \partial L / \partial x_0^1 &= l^i \partial u_i / \partial x_0^1 = D l^i B_i = -D L l_0^1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Таким образом, для членов, связанных с эффектом Доплера, имеем:

$$(l_0^i / L) \partial L / \partial x_0^i \equiv (l_0^i v_0) \partial v_0 / \partial x_0^i = -(b + D l_0^1). \quad (4.29)$$

Далее, из (4.27) находим:

$$\left. \begin{aligned} \partial l_0^4 / \partial \tau_0 &= \partial l_0^4 / \partial x_0^1 = 0; \quad \partial l_0^1 / \partial \tau_0 = -(l_0^1 / L) \partial L / \partial \tau_0 - \\ &- (l^i / L) \partial B_i / \partial \tau_0 = b (l_0^1)^2 - b u_i l^i / L = -b [1 - (l_0^1)^2]; \\ \partial l_0^1 / \partial x_0^1 &= -(l_0^1 / L) \partial L / \partial x_0^1 - l^i \partial B_i / \partial x_0^1 = D (l_0^1)^2 - \\ &- D = -D [1 - (l_0^1)^2]. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Отсюда имеем для эффектов, связанных с абберацией:

$$\partial l_0^i / \partial x_0^i = \partial l_0^4 / \partial \tau_0 + \partial l_0^1 / \partial x_0^1 = -D [1 - (l_0^1)^2]. \quad (4.31)$$

Используя эти формулы в (4.26), приходим окончательно к ранее выведенному уравнению (4.20).

Аналогичным образом «вынося» с соответствующими изменениями частоту v_0 из-под знака дифференциала в уравнении (4.26), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0^i} (I_{v0} l_0^i dv_0 d\omega_{v0}) - (I_{v0} dv_0 d\omega_{v0}) \left[\frac{2l_0^i}{L} \frac{\partial L}{\partial x_0^i} + \frac{\partial l_0^i}{\partial x_0^i} \right] = \\ = \frac{g v_0^3 dv_0 d\omega_{v0}}{hc^3} \frac{dF_{v0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Умножая это уравнение на l_{40} и учитывая (4.29)—(4.31), приходим к первому уравнению (4.23). Для того чтобы получить второе уравнение из (4.24), следует умножить (4.32) на l_{k0} и «внести»

эту компоненту под знак дифференцирования. В результате будем иметь уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0^i} (I_{v0} l_0^i l_{k0} dv_0 d\omega_{v0}) - (I_{v0} dv_0 d\omega_{v0}) \left[\frac{2l_{k0} l_0^i}{L} \frac{\partial L}{\partial x_0^i} + \right. \\ \left. + l_{k0} \frac{\partial l_0^i}{\partial x_0^i} + l_0^i \frac{\partial l_{k0}}{\partial x_0^i} \right] = \frac{gv_0^3 l_{k0} dv_0 d\omega_{v0}}{hc^3} \frac{dF_{v0}}{d\tau_0} \Big|_{ct}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Из формул (4.30) можно найти для появившегося члена эффекта абберации следующую формулу:

$$l_0^i \partial l_{10} / \partial x_0^i = \partial l_{10} / \partial \tau_0 + l_0^1 \partial l_{10} / \partial x_0^1 = -(b + D l_0^1) [1 - (l_0^1)^2]. \quad (4.34)$$

Используя ее в (4.33), приходим ко второму уравнению (4.23). Для одномерного движения в сферической с. к. формулы для членов, описывающих эффекты Доплера и абберации, несколько усложняются, а именно, можно показать, что будут справедливы следующие выражения [16]:

$$\left. \begin{aligned} (l_0^i / v_0) \partial v_0 / \partial x_0^i &= (l_0^i / L) \partial L / \partial x_0^i = - \{ l_0^1 (b + D l_0^1) + \\ &+ u^1 [(l_0^2)^2 + (l_0^3)^2] / r \}; \\ \partial l_0^i / \partial x_0^i &= - \{ D [1 - (l_0^1)^2] + (2u^4 / r) l_0^1 + (2u^1 / r) \times \\ &\times [1 - ((l_0^2)^2 + (l_0^3)^2) / r] \}; \\ l_0^i \partial l_0^1 / \partial x_0^i &= - (b + D l_0^1) [1 - (l_0^1)^2] + (u^4 + u^1 l_0^1) \times \\ &\times [(l_0^2)^2 + (l_0^3)^2] / 2. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Использование именно этих соотношений в уравнениях (4.33) приводит к уравнениям (4.24). Достоинство данного подхода, основанного на интегрировании уравнения Больцмана или уравнения переноса, состоит в том, что таким способом легко вывести уравнения и для более высоких угловых моментов интенсивности, например, для

$$\begin{aligned} M_{01}^{11} = M_0 &= - \frac{1}{c} \int (l_0^1)^2 l_{10} I_{v0} dv_0 d\omega_{v0}; \quad R_{011}^{11} = R_0 = \\ &= \frac{1}{c} \int (l_0^1)^2 (l_{10})^2 I_{v0} dv_0 d\omega_{v0}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Умножая (4.33) на l_{10} , можно, в частности, получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0^i} (I_{v0} l_0^1 l_{10} l_0^i dv_0 d\omega_{v0}) + (I_{v0} dv_0 d\omega_{v0}) \left[\frac{2l_0^1 l_{10} l_0^i}{L} \frac{\partial L}{\partial x_0^i} + \right. \\ \left. + 2l_0^1 l_0^i \frac{\partial l_{10}}{\partial x_0^i} + l_0^1 l_{10} \frac{\partial l_0^i}{\partial x_0^i} \right] = \frac{gv_0^3 l_0^1 l_{10} dv_0 d\omega_{v0}}{hc^3} \frac{dF_{v0}}{d\tau_0} \Big|_{ct}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Используя в этом уравнении выражения (4.35) и определения (4.36), выведем еще одно уравнение моментов

$$\partial K_0 / \partial \tau_0 + \partial M_0 / \partial x_0^1 + (2b - 2u^4/r)S_0 + (3D + u^1/r)K_0 + (u^4/r)M_0 - (D - u^1/r)R_0 = q_{10}^1. \quad (4.38)$$

§ 22. Компоненты тензора энергии — импульса излучения в условиях, близких к ЛТР при учете комптоновского рассеяния

Уравнения (4.24), (4.38) могут послужить основой для получения компонент тензора энергии — импульса излучения в условиях, близких к равновесным. Для этого следует использовать конкретный вид 4-вектора $\bar{q}_0$ обмена энергией — импульсом между излучением и веществом.

В гл. 3 показано, что в условиях, когда передача энергии — импульса от излучения веществу вследствие эффекта Комптона мала, что справедливо при $x = m_e c^2 / kT_0 \gg 1$, $\hbar \bar{\nu} / kT_0 \gg 1$, компоненты 4-вектора $\bar{q}_0$ даются следующими формулами:

$$q_{10} = -\kappa_R S_0; \quad q_{40} = \alpha_p (B_0^* - J_0) + \sigma_0 J_0 (4/x) (1 - T_r/T_0). \quad (4.39)$$

Здесь эффекты комптоновского рассеяния учтены только в компоненте q_{40} , где они играют ведущую роль, обеспечивая возможность достижения равновесия при учете одного рассеяния, даже без поглощения. В компоненте q_{10} члены, связанные с этим эффектом, носят характер малых поправок. Величина α_p есть планковское среднее от линейного коэффициента поглощения, а $\kappa_R = (\alpha_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)_R$ — росселандово среднее от непрозрачности. Величина T_r , называемая температурой излучения, введена для средней энергии кванта: $kT_{r0} = \frac{1}{4} \int_0^\infty h\nu_0 J_{\nu 0} d\nu_0$, и при высоких температурах, когда распределение интенсивности излучения по частотам близко к закону Вина, может быть определена из приближенного соотношения $J_0 \approx B_0^* (T_r) = aT_r^4$, где $B_0^* = (4\pi/c)B_0$; B_0 — интеграл от функции Планка при температуре T_r . В равновесных условиях, когда интенсивность излучения дается формулой Планка при температуре T_r , интегральные угловые моменты интенсивности излучения (2.7) принимают значения:

$$J_0^{(1)} = B_0^*; \quad S_0^{(1)} = 0; \quad K_0^{(1)} = B_0^*/3; \quad M_0^{(1)} = 0; \quad R_0^{(1)} = B_0^*/5. \quad (4.40)$$

Поскольку интегрирование столкновительного члена в правой части уравнения (4.37) приводит к следующему выражению для величины q_{10}^1 из уравнения (4.38):

$$q_{10}^1 = \alpha_p (B_0^*/3 - K_0) + \sigma_0 (J_0/3 - K_0), \quad (4.41)$$

то отсюда и из выражений (4.39) ясно, что в правых частях уравнений моментов (4.24), (4.38) возникают ненулевые добавки второго приближения $W_{k0}^{i(2)}$ компонент тензора энергии — импульса излучения. В самом деле, выразив T_r через $J_0^{1/4}$, получаем из (4.39) для q_{40} в предположении $J_0 \approx B_0^* + J_0^{(2)}$ ($J_0^2 \ll B_0^*$):

$$q_{40} = \alpha_p (B_0^* - J_0) + \frac{4\sigma_0 J_0}{x} \frac{(B_0^*)^{1/4} - J_0^{1/4}}{(B_0^*)^{1/4}} = -\alpha_p J_0^{(2)} - \frac{4\sigma_0 B_0^*}{x (B_0^*)^{1/4}} \frac{J_0^{(2)}}{4 (B_0^*)^{3/4}} = -J_0^{(2)} \left(\alpha_p + \frac{\sigma_0}{x} \right).$$

Аналогичным образом из (4.39), (4.41) находим:

$$q_{10} = -\kappa_R S_0^{(2)}; \quad q_{10}^1 = -K_0^{(2)} (\alpha_p + \bar{\sigma}_0) + J_0^{(2)} \sigma_0 / 3.$$

Подставляя равновесные значения (4.40) в левые части уравнений (4.24), (4.37), получаем следующие выражения для компонент тензора энергии—импульса излучения $W_{k0}^i = W_{k0}^{i(1)} + W_{k0}^{i(2)}$ во втором приближении:

$$\left. \begin{aligned} J_0 &\approx B_0^* + \frac{1}{\alpha_p + \sigma_0/x} \left[\frac{\partial B_0^*}{\partial \tau_0} + \frac{4}{3} B_0^* \left(D + \frac{2u^1}{r} \right) \right]; \\ S_0 &\approx -\frac{1}{\kappa_R} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial B_0^*}{\partial \tau_0} + \frac{4}{3} B_0^* \left(b + \frac{2u^4}{r} \right) \right]; \\ K_0 &\approx \frac{B_0^*}{3} - \frac{1}{\alpha_p + \bar{\sigma}_0} q_{10}^1 + \frac{J_0^{(2)}}{3} \frac{\sigma_0}{\alpha_p + \sigma_0} = \frac{1}{3} B_0^* - \\ &- \frac{1}{3(\alpha_p + \bar{\sigma}_0)} \frac{\partial B_0^*}{\partial \tau_0} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\alpha_p + \sigma_0/x} \right) - \frac{4B_0^*}{9(\alpha_p + \bar{\sigma}_0)} \times \\ &\times \left[D \left(\frac{9}{5} + \frac{\sigma_0}{\alpha_p + \sigma_0/x} \right) + \frac{2u^1}{r} \left(\frac{3}{5} + \frac{\sigma_0}{\alpha_p + \sigma_0/x} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Эти значения компонент тензора энергии—импульса излучения в условиях, близких к равновесным, обобщают результаты гл. 2. Случай $x = \infty$ соответствует учету рассеяния в приближении полной изотропности и когерентности рассеяния квантов. Использование выражений (4.42) во втором уравнении (4.24) дает обобщение известного уравнения диффузии излучения, связанное с учетом эффектов комптоновского рассеяния.

§ 23. Уравнения газодинамики в сопутствующей системе отсчета

Для полноты описания получим также уравнения газодинамики в н. с. Проще всего эти уравнения получаются на основе соотношений (4.14) для производных 4-скорости $\bar{u}_0$. В самом де-

ле, определим ненулевые компоненты тензора энергии — импульса вещества в н. с. следующим образом:

$$T_{10}^1 = T_{20}^2 = T_{30}^3 = -p_0; \quad T_{40}^4 = \varepsilon_0, \quad (4.43)$$

где ε_0 , p_0 — плотность энергии и материальное давление вещества. Эти выражения можно объединить в формуле

$$T_{k0}^i = \varepsilon_0 u_0^i u_{k0} + p_0 (B_0^i B_{k0} + \omega_0^i \omega_{k0} + q_0^i q_{k0}), \quad (4.44)$$

которая является частным случаем общей формулы (1.4):

$$T_k^i = T_{n0}^m (e_{m0})^i (e_0^n)_k = \varepsilon_0 u^i u_k + p_0 (B^i B_k + \omega^i \omega_k + q^i q_k). \quad (4.45)$$

Отметим, что если в (4.45) использовать свойство взаимных векторов $\delta_k^i = (e_{m0})^i (e_0^m)_k = u^i u_k - B^i B_k - \omega^i \omega_k - q^i q_k$, то получим более привычный вид для выражений тензоров энергии — импульса:

$$T_{k0}^i = (\varepsilon_0 + p_0) u_0^i u_{k0} - p_0 \delta_k^i; \quad T_k^i = (\varepsilon_0 + p_0) u^i u_k - p_0 \delta_k^i. \quad (4.46)$$

Поскольку для уравнений гидродинамики имеем формулу (2.10): $q_{k0} = \partial T_{k0}^i / \partial x_0^i$, то взяв тензорную дивергенцию от T_{k0}^i из уравнения (4.46) и использовав соотношения (4.14), получаем следующую формулу уравнений гидродинамики в н. с. в одномерном случае:

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon_0 / \partial \tau_0 + (D + 2u^1/r) (\varepsilon_0 + p_0) &= -q_{40}; \\ \partial p_0 / \partial x_0^1 + b (\varepsilon_0 + p_0) &= q_{10}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

В дополнение к этим уравнениям следует написать уравнение непрерывности, которое очень просто получается образованием дивергенции от 4-вектора потока вещества $s_0^i = \rho_0 u_0^i$, где ρ_0 — плотность вещества в н. с. Дифференцируя s_0^i , получаем уравнение

$$\partial \rho_0 / \partial \tau_0 + \rho_0 (D + 2u^1/r) = 0. \quad (4.48)$$

Чтобы привести эти уравнения к более привычному виду, в л. с., используем выражения (4.12), (4.13) для b и D , представив их в форме:

$$\begin{aligned} b &= \theta^3 d\beta/d\tau; \quad D = \theta^3 [\partial\beta/\partial r + \beta\partial\beta/\partial\tau]; \quad D + 2u^1/r = \\ &= \theta^3 [\operatorname{div} \beta (1 - \beta^2) + \beta d\beta/d\tau], \end{aligned} \quad (4.49)$$

где введены обозначения

$$d\beta/d\tau = \partial\beta/\partial\tau + \beta\partial\beta/\partial r; \quad \operatorname{div} \beta = \partial\beta/\partial r + 2\beta/r. \quad (4.50)$$

Тогда для дифференциальных операторов имеем в согласии с (1.2), (4.1):

$$\begin{aligned} \partial/\partial\tau_0 &= u^k \partial/\partial x^k = \theta d/d\tau; \quad \partial/\partial x_0^1 = B^k \partial/\partial x^k = \\ &= \theta [(1 - \beta^2) \partial/\partial r + \beta d/d\tau]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Используя эти соотношения в уравнениях (4.47), получаем следующую их форму в л. с.:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_0/d\tau + (\varepsilon_0 + p_0) \operatorname{div} \beta + [(\varepsilon_0 + p_0)/(1 - \beta^2)] \beta d\beta/d\tau = \\ = -q_{40} \sqrt{1 - \beta^2}; \\ (1 - \beta^2) \partial p_0/\partial r + \beta^2 \partial p_0/\partial \tau + [(\varepsilon_0 + p_0)/(1 - \beta^2)] d\beta/d\tau = \\ = q_{10} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Уравнение непрерывности (4.48) принимает такую форму:

$$d\rho_0/d\tau + \rho_0 \operatorname{div} \beta + [\rho_0 \beta / (1 - \beta^2)] d\beta/d\tau = 0. \quad (4.53)$$

Если вместо плотности ρ_0 использовать плотность ρ , определенную в фиксированной с. о. соотношением $\rho = \rho_0 \theta = \rho_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, то уравнение (4.53) примет обычный вид

$$d\rho/d\tau + \rho \operatorname{div} \beta = 0. \quad (4.54)$$

Уравнения (4.52), (4.53) согласуются с уравнениями (2.13), (2.42), приведенными ранее.

ГЛАВА 5

ДИФфуЗИОННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ (РГД). ЛУЧИСТАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И КОМПТОНОВСКАЯ РАДИАЦИОННАЯ ГАЗОДИНАМИКА (КРГ)

В условиях, когда излучение настолько сильно взаимодействует с веществом, что эффективный пробег фотонов становится малым по сравнению с характерным масштабом изучаемого процесса, возникает возможность упрощения сложных уравнений РРГД на основе использования так называемого диффузионного приближения для описания переноса энергии и импульса излучением. Указанное приближение предполагает не только малость изменений плотности энергии и потока импульса излучений за среднее время и на длине свободного пробега фотонов, но также и относительную малость потока импульса по сравнению с плотностью энергии излучения. При этом приходится использовать также и нерелятивистское приближение как по макроскопической скорости вещества, так и по скоростям его теплового движения, включая тепловое движение электронов. Самое сильное ограничение накладывается на температуру вещества. Должно выполняться неравенство $T_0 \ll 6 \cdot 10^9$ К, чтобы тепловые скорости электронов были малы по сравнению со скоростью света (т. е. $kT_0 \ll m_e c^2$). В этом случае для решения уравнений РГД можно применить метод Энскога [35].

Как уже указывалось ранее, в зависимости от конкретного характера преобладающего эффекта взаимодействия фотонов с веществом, можно выделить два предельных случая. Если преобладающим процессом взаимодействия является поглощение фотонов (вместе с соответствующим испусканием), то выполняются условия ЛТР и уравнения РГД сводятся к хорошо известному случаю лучистой теплопроводности.

Другой предельный случай — с преобладающей ролью процессов рассеяния фотонов, в котором для уравнений РГД можно сформулировать приближение, названное нами комптоновской радиационной газодинамикой (КРГ). Наиболее существенное отличие этих двух приближений состоит в том, что в приближении лучистой теплопроводности равновесная функция распределения фотонов дается формулой Планка (химический потенциал фотонов считается равным нулю), а в КРГ считается, что при некоторых условиях в результате многократных столкновений и обмена энергией и импульсом фотонов и электронов успевает произойти полная комptonизация фотонов, т. е. для фотонов в нулевом приближении устанавливается бозе-эйнштейновское распределение с химическим потенциалом фотонов $\psi_0 \neq 0$.

§ 24. Диффузионное приближение. Метод Энскога

Диффузия фотонов сквозь непрозрачную среду определяется совместным действием процессов поглощения (и испускания) и рассеяния фотонов на атомах, ионах и электронах вещества. Это явление можно эффективно описать в тех случаях, когда характеристики излучения мало меняются на расстоянии свободного пробега фотона и за время этого пробега. Указанное ограничение предполагает слабую анизотропию излучения в с. с., а если исследование проводится в л. с., то следует также предположить нерелятивистский характер макроскопического и теплового движения вещества. Кроме того, очевидно, что при использовании сферической с. к. все процессы должны рассматриваться на достаточно больших расстояниях от начала отсчета, так что в ряде случаев можно пренебрегать членами, учитывающими влияние сферического фактора на какую-либо величину по сравнению с производными по координате от этой величины.

При перечисленных выше условиях в соответствии с методом Энскога [35] будет считать, что функция распределения фотонов $F_{\nu 0}$ близка к равновесной функции $\tilde{F}_{\nu 0}$, в качестве которой в зависимости от характера преобладающих эффектов взаимодействия излучения с веществом могут выступать либо функция Планка $\tilde{F}_{\nu 0}^a (\psi_0 = 0)$, либо бозе-эйнштейновская функция $\tilde{F}_{\nu 0}^s (\psi_0 \neq 0)$, причем малая диффузионная поправка $f_{\nu 0}^{(1)}$ вклю-

чает линейную зависимость от направляющего вектора рассеяния фотона. Таким образом, в с. с. будем иметь:

$$F_{\nu 0} \approx \tilde{F}_{\nu 0} + \mu_0 f_{\nu 0}^{(1)}(x_0); \quad \mu_0 = (\bar{l}_0 \bar{n}); \quad \bar{n} = \bar{r}/r; \quad |f_{\nu 0}^{(1)}| \ll \tilde{F}_{\nu 0}. \quad (5.1)$$

Предположим теперь, что обмен энергией в актах комптоновских соударений мал ($h\nu_0 \ll m_e c^2$; $kT_0 \ll m_e c^2$) и рассеяние происходит когерентным образом без изменения частоты. Тогда справедливо уравнение Больцмана в простой форме (3.4), которое для одномерного стационарного случая принимает вид

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial F_{\nu 0}(\bar{l}_0)}{\partial x_0} = & \alpha'_{\nu 0} [\tilde{F}_{\nu 0}^a - F_{\nu 0}(\bar{l}_0)] - \sigma_0 [F_{\nu 0}(\bar{l}_0) - \\ & - \int_{(\bar{l}'_0)} F_{\nu 0}(\bar{l}'_0) \Omega(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\Omega(\bar{l}'_0, \bar{l}_0)$ — симметричная индикатриса рассеяния, $\alpha'_{\nu 0} = \alpha_{\nu 0} [1 - \exp(-h\nu_0/kT_0)]$ — коэффициент поглощения с учетом индуцированного испускания. Подставляя (5.1) в (5.2), в первом приближении находим

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \tilde{F}_{\nu 0}}{\partial x_0} = & \alpha'_{\nu 0} (\tilde{F}_{\nu 0}^a - \tilde{F}_{\nu 0}) - \alpha'_{\nu 0} \mu_0 f_{\nu 0}^{(1)} - \\ & - \sigma_0 f_{\nu 0}^{(1)} [\mu_0 - \int_{(\bar{l}'_0)} (\bar{l}'_0 \bar{n}) \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0] = \alpha'_{\nu 0} (\tilde{F}_{\nu 0}^a - \tilde{F}_{\nu 0}) - \\ & - \mu_0 f_{\nu 0}^{(1)} (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0), \quad \bar{\sigma}_0 = \sigma_0 (1 - \langle \cos \theta_0 \rangle). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Входящее сюда выражение $\bar{\sigma}_0$ есть транспортное сечение рассеяния, определенное в § 13. При его получении в (5.3) была использована теорема косинусов, в соответствии с которой в интегральном члене рассеяния имеем

$$\int_{(\bar{l}'_0)} (\bar{l}'_0 \bar{n}) \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0 = (\bar{l}_0 \bar{n}) \int_{(\bar{l}'_0)} (\bar{l}'_0 \bar{l}_0) \Omega_0(\bar{l}'_0, \bar{l}_0) d\bar{l}'_0 = \mu_0 \langle \cos \theta_0 \rangle.$$

Из (5.3) получаем конкретный вид диффузионной поправки:

$$f_{\nu 0}^{(1)} = [\alpha'_{\nu 0} (\tilde{F}_{\nu 0}^a - \tilde{F}_{\nu 0}) - \mu_0 \partial \tilde{F}_{\nu 0} / \partial x_0] / \mu_0 (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0). \quad (5.4)$$

Таким образом, в первом приближении

$$F_{\nu 0} \approx \tilde{F}_{\nu 0} + [\alpha'_{\nu 0} / (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)] (\tilde{F}_{\nu 0}^a - \tilde{F}_{\nu 0}) - [\mu_0 / (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)] \partial \tilde{F}_{\nu 0} / \partial x_0. \quad (5.5)$$

На основе этого выражения можно получить приближенные значения всех моментов функции распределения, которые затем используются в уравнениях РГД для нахождения эффективных способов описания диффузии излучения в непрозрачном веществе.

§ 25. Приближение лучистой теплопроводности

Рассмотрим случай доминирующей роли поглощения, при котором равновесная функция распределения фотонов $\tilde{F}_{\nu 0}$ дается формулой Планка (1.40): $\tilde{F}_{\nu 0}^a = [\exp(h\nu_0/kT_0) - 1]^{-1}$.

Тогда по формуле (5.5) для первого приближения функции распределения фотонов $F_{\nu 0}$, а, следовательно, на основе связей (1.28) и ввиду предположения о постоянстве частоты ν_0 также и для интенсивности $I_{\nu 0}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} F_{\nu 0} &\approx \tilde{F}_{\nu 0}^a - [\mu_0/(\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)] \partial \tilde{F}_{\nu 0}^a / \partial x_0; \\ I_{\nu 0} &\approx B_{\nu 0} - [\mu_0/(\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)] \partial B_{\nu 0} / \partial x_0 = \\ &= B_{\nu 0} - \frac{\mu_0}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \left(\frac{\partial B_{\nu 0}}{\partial T_0} \right) \left(\frac{\partial T_0}{\partial x_0} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Интегрированием по нормированному телесному углу $d\bar{l}_0 = d\mu_0 d\varphi_0 / 4\pi$ в соответствии с определениями (3.6) отсюда найдем следующие выражения для спектральных угловых моментов в первом приближении:

$$\begin{aligned} J_{\nu 0}^{(1)} &\approx B_{\nu 0}; \quad S_{\nu 0}^{(1)} \approx -\frac{1}{3(\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)} \left(\frac{\partial B_{\nu 0}}{\partial T_0} \right) \frac{\partial T_0}{\partial x_0}; \\ K_{\nu 0}^{(1)} &\approx \frac{1}{3} B_{\nu 0}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для получения интегральных угловых моментов следует провести интегрирование выражений (5.7) по частоте. При этом обычно вводится усредненное по Росселанду значение для пробега фотона

$$\begin{aligned} l_R = \kappa_R^{-1} &= \left(\frac{\partial B_0}{\partial T_0} \right)^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \frac{\partial B_{\nu 0}}{\partial T_0} d\nu_0 = \\ &= \left(\frac{\partial B_0}{\partial T_0} \right)^{-1} \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_z [1 - \exp(-z)] + \bar{\sigma}_0} \frac{z^4 \exp(z) dz}{[\exp(z) - 1]^2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$B_0 = \frac{ac}{4\pi} T_0^4; \quad \int_0^\infty \frac{\partial B_{\nu 0}}{\partial T_0} d\nu_0 = \frac{\partial B_0}{\partial T_0} \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^4 \exp(z) dz}{[\exp(z) - 1]^2} = \frac{\partial B_0}{\partial T_0}.$$

В результате такого интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} J_0^{(1)} &\approx B_0^*; \quad S_0^{(1)} = -(l_R/3) (\partial B_0^* / \partial T_0) \partial T_0 / \partial x_0; \\ K_0^{(1)} &= B_0^* / 3; \quad B_0^* = (4\pi/c) B_0 = aT_0^4. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Эти выражения можно использовать в уравнениях РРГД (2.15), которые в нерелятивистском приближении можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 d\beta/d\tau + \partial S/\partial\tau + \partial(\rho_0 + K)/\partial r - (J - 3K)/r &= 0; \\ \frac{d\varepsilon_0}{d\tau} + (\varepsilon_0 + p_0) \rho_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) + \left[\frac{\partial J}{\partial\tau} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S) \right] - \\ - \beta \left[\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{J - 3K}{r} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Поскольку в эти уравнения входят радиационные величины, определенные в л. с., следует использовать связи (3.46), в нерелятивистском случае сводящиеся к соотношениям:

$$\begin{aligned} J^{(1)} = J_0^{(1)} = B_0^*; S^{(1)} = S_0^{(1)} + \beta (J_0^{(1)} + K_0^{(1)}) = 4\beta B_0^*/3 - \\ - (l_R/3) (\partial B_0^*/\partial T_0) \partial T_0/\partial r; K^{(1)} = K_0^{(1)} = B_0^*/3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь использовано предположение о малости росселандова пробега, так что членами порядка $\beta S_0^{(1)}$, которые могли бы войти в выражения для $J^{(1)}$ и $K^{(1)}$, пренебрежено. Кроме того, произведена замена координаты x_0 на r .

С помощью (5.11) для дивергенции потока излучения найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S^{(1)}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_0^{(1)}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\beta r^2 (J^{(1)} + K^{(1)})] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_0^{(1)}) + (J^{(1)} + K^{(1)}) \rho_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial r} (J^{(1)} + K^{(1)}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Используя (5.12) во втором уравнении (5.10) и равенство $\partial J/\partial\tau = dJ/d\tau - \beta \partial J/\partial r$, получаем окончательно хорошо известное уравнение лучистой теплопроводности

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\varepsilon_0 + p_0 + \frac{4}{3} a T_0^4 \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) + \\ + \frac{d}{d\tau} (\varepsilon_0 + a T_0^4) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{4}{3} a T_0^3 l_R \frac{\partial T_0}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где росселандов пробег l_R дается формулой (5.8). Полная система для неизвестных функций ρ_0 , T_0 , β состоит, кроме уравнения диффузии (5.13), еще из уравнения непрерывности (2.42) и уравнения Эйлера из (5.10):

$$\frac{d\rho_0}{d\tau} + \frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\beta r^2) = 0; \quad \rho_0 \frac{d\beta}{d\tau} = - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{4}{3} a T_0^3 \frac{\partial T_0}{\partial r}. \quad (5.14)$$

Выражения для остальных моментов функции распределения можно использовать при оценке применимости уравнений лу-

чистой теплопроводности. Используя выражение (5.6) в определениях (2.3), получаем

$$N_p = N_0^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \int_{(v_0 \bar{l}_0)} \frac{I_{v0}}{h v_0} dv_0 d\bar{l}_0 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{B_{v0}^*}{h v_0} dv_0 = \frac{a T_0^4}{k T_0} \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp(z) - 1} = \frac{a T_0^4}{2,7 k T_0}. \quad (5.15)$$

$$H_0^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \int_{(v_0 \bar{l}_0)} \frac{I_{v0}}{h v_0} dv_0 l_0^1 d\bar{l}_0 = -\frac{1}{3} \frac{\partial T_0}{\partial r} \int_0^\infty \frac{1}{h v_0} \frac{\partial B_{v0}^*}{\partial T_0} \frac{dv_0}{\alpha'_{v0} + \bar{\sigma}_0} =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{l_{R1}}{k T_0} \frac{\partial B_0^*}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} = -\frac{4 a T_0^3}{3 k T_0} l_{R1} \frac{\partial T_0}{\partial r}.$$

Здесь введено новое значение среднего пробега

$$l_{R1} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{1}{h v_0} \frac{\partial B_{v0}}{\partial T_0} \frac{dv_0}{\alpha'_{v0} + \bar{\sigma}_0} =$$

$$= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_z (1 - \exp(-z)) + \bar{\sigma}_0} \frac{z^3 \exp(z) dz}{(\exp(z) - 1)^2}, \quad (5.16)$$

которое, как следует из определения (5.8), отличается от росселандова пробега l_R тем, что в подынтегральном выражении степень z на единицу меньше, чем в выражении (5.8).

При вычислении интегралов, входящих в (5.15), использовано общее выражение, приведенное в [36] для интегралов типа

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{\exp(z) - 1} = \Gamma(x) \zeta(x), \quad (x > 1), \quad (5.17)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана. Отсюда, в частности, имеем следующие интегралы, использованные и в (5.15):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp(z) - 1} &= \Gamma(3) \zeta(3) = 2 \cdot 1,202 = 2,404; \\ \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{\exp(z) - 1} &= \Gamma(4) \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}; \\ \int_0^\infty \frac{z^4 dz}{\exp(z) - 1} &= \Gamma(5) \zeta(5) = 24 \cdot 1,037 = 24,888. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Таким образом, согласно (5.15), среднее значение энергии фотона $h\bar{\nu}_0 = J_0/N_0 = B_0/N_p = 2,7kT_0$, так что средний росселандов пробег (5.8) определяется в основном весьма энергичными длиннопробежными фотонами с $h\nu > h\nu_0$.

Из формулы (5.9) для плотности потока импульса S_0 можно получить оценку характерного размера изменения температуры для таких объектов как звезды:

$$[(1/T_0)\partial T_0/\partial r]^{-1} l_R^{-1} = 4aT_0^4/3S_0 \gg 1.$$

Следовательно, средний росселандов пробег много меньше характерного изменения температуры, поскольку внутри звезды величина T_0 возрастает, а величина S_0 , наоборот, убывает, в частности, в конвективных слоях и зонах энерговыделения. При доминирующей роли поглощения неравенство

$$[(1/T_0)\partial T_0/\partial r]\alpha'_{\nu_0} = [(1/T_0)\partial T_0/\partial r] (1/l_a(\nu_0)) > 1$$

достаточно сильное за исключением далекой виновской области, где из-за роста длины пробега с энергией фотонов возможно $l_a(\nu_0) \gg l_R$. Отсюда следует заключение об установлении равновесного планковского распределения практически во всей области спектра (с возможностью отклонений от него в области очень высоких энергий фотонов). Очевидно, это и обосновывает справедливость приближения лучистой теплопроводности.

§ 26. Обоснование приближения полной комптонизации фотонов

При возрастающей роли процессов рассеяния предположение об установлении локального планковского равновесия становится несправедливым. Поскольку пробег рассеяния фотонов практически не зависит от частоты, должно выполняться неравенство $l_R \leq l_s(\nu_0) = (\sigma_0^s N_0^s)^{-1} \approx l_{sT} = (\sigma_T N_0^s)^{-1}$, где σ_T — томсоновское сечение, а N_0^s — плотность рассеивающих частиц. Если одновременно имеет место $l_a(\nu_0) = (\alpha'_{\nu_0})^{-1} \gg l_s(\nu_0)$ благодаря увеличению роли рассеяния, то отсюда следует $l_R \ll l_a(\nu_0)$. Таким образом, все шире по спектру становится область, где нарушается неравенство $[(1/T_0)\partial T_0/\partial r]^{-1} (1/l_a(\nu_0)) > 1$ и где тем самым возникают отклонения от планковского равновесия. В конце концов эти отклонения, захватывая область средних тепловых энергий фотонов, становятся столь велики, что приближение лучистой теплопроводности теряет смысл. Фактически к увеличению относительной роли процессов рассеяния ведет, например, повышение температуры и уменьшение плотности вещества.

Резкое повышение температуры происходит при внезапном выделении тепловой энергии внутри звезды. В первоначально стационарной гидростатически равновесной звезде сразу нарушается тепловое равновесие и начинается распространение теп-

ловой волны от места выделения энергии. Эта тепловая волна при определенных условиях может вызвать движение вещества и даже превратиться в ударную волну, так что развивается нестационарный газодинамический процесс взрыва звезды. Особенно велика выделенная энергия во вспышках Сверхновых. В этом случае во внешних слоях звезды, имеющих сравнительно низкую плотность, появляются столь большие температуры, что практически во всей области энергий соответствующего планковского распределения $l_a(\nu_0) \gg l_R$.

Рассмотрим такой предельный случай, когда роль процессов поглощения и испускания фотонов по сравнению с комптоновским рассеянием на электронах пренебрежимо мала. Пусть также выполняется еще одно условие: характерные масштабы времени и длины интересующей нас задачи намного превышают эффективные времена и длины полной комптонизации фотонов. При неизменных условиях (температуре, плотности, составе вещества) за такие эффективные времена устанавливается благодаря многократным комптоновским соударениям фотонов с электронами бозе-эйнштейновское распределение фотонов по энергиям. Эффективное время комптонизации фотонов t_c в нерелятивистском случае можно грубо оценить следующим образом [37].

Фотон набирает (или теряет) энергию в n соударениях с электронами, где $n \approx kT_0/\Delta\varepsilon_0 \approx m_e c^2/kT_0$, так как $\Delta\varepsilon_0 \approx \approx h\nu_0 (h\nu_0/m_e c^2)$ и $h\nu_0 \approx kT_0$. Отсюда $t_K \approx n (l_{CT}/c) \approx \approx (l_{CT}/c) (m_e c^2/kT_0)$. При соударениях с равновероятным изменением энергии в большую или в меньшую сторону множитель $m_e c^2/kT_0$ входил бы в это выражение во второй степени. Эффективная длина комптонизации l_K , которая определяется диффузией фотонов, имеет при этом порядок [38]:

$$l_K \approx (l_{CT} c t_K)^{1/2} \approx l_{CT} (m_e c^2/kT_0)^{1/2}.$$

В обычном газодинамическом процессе, когда $t_{хар} \approx r_{хар}/v_{хар}$ и $v_{хар} \approx (kT_0/m_i)^{1/2}$, достаточно выполнения лишь одного условия

$$r_{хар} \gg l_{CT} (m_e c^2/kT_0)^{1/2} \approx l_K, \quad (5.19)$$

потому что отсюда следует $t_{хар} \gg (m_i/m_e)^{1/2} (l_{CT}/c) (m_e c^2/kT_0) \approx \approx (m_i/m_e)^{1/2} t_K \gg t_K$. Таким образом, условие (5.19) обеспечивает установление бозе-эйнштейновского распределения фотонов по энергиям, если вместе с ним предполагается доминирующая роль процессов комптоновского рассеяния во всей существенной части спектра. Заметим, что полностью пренебречь процессами поглощения по сравнению с процессами рассеяния во всей области спектра нельзя. В области низких энергий всегда реально существуют участки спектра, где процессы поглощения даже преобладают. Тем не менее вклад таких участков в интегральные характеристики излучения невелик.

§ 27. Основные уравнения комptonовской радиационной газодинамики (КРГ)

Рассматривая описанные выше условия, при которых равновесная функция распределения фотонов $\tilde{F}_{\nu 0}$ дается бозе-эйнштейновской функцией $\tilde{F}_{\nu 0}^s = \{ \exp [(h\nu_0 - \psi_0)/kT_0] - 1 \}^{-1}$, из формулы (5.5) получаем в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} F_{\nu 0} &\approx \tilde{F}_{\nu 0}^s + \frac{\alpha'_{\nu 0}}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} (\tilde{F}_{\nu 0}^a - \tilde{F}_{\nu 0}^s) - \frac{\mu_0}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \frac{\partial \tilde{F}_{\nu 0}^s}{\partial r}; \\ I_{\nu 0} &\approx B_{\nu \psi 0} + \frac{\alpha'_{\nu 0}}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} (B_{\nu 0} - B_{\nu \psi 0}) - \frac{\mu_0}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \frac{\partial B_{\nu \psi 0}}{\partial r} = \\ &= B_{\nu \psi 0} + \frac{\alpha'_{\nu 0}}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} (B_{\nu 0} - B_{\nu \psi 0}) - \\ &- \frac{\mu_0}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \left[\frac{\partial B_{\nu \psi 0}}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{\partial B_{\nu \psi 0}}{\partial \psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right], \end{aligned} \right\} (5.20)$$

где введены обозначения для равновесной интенсивности излучения и безразмерного химического потенциала фотонов:

$$\begin{aligned} B_{\nu \psi 0} &= (gh\nu_0^3/c^2) \tilde{F}_{\nu 0}^s = (gh\nu_0^3/c^2) [\exp (h\nu_0/kT_0 - \psi') - 1]^{-1}; \\ \psi' &= \psi_0/kT_0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для нахождения спектральных моментов в соответствии с определениями (3.46) проинтегрируем (5.20) по нормированному телесному углу $d\bar{l}_0 = d\mu_0 d\varphi_0/4\pi$ и получим в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned} J_{\nu 0}^{(1)} &= B_{\nu \psi 0} + \alpha'_{\nu 0} (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)^{-1} (B_{\nu 0} - B_{\nu \psi 0}); \quad K_{\nu 0}^{(1)} = J_{\nu 0}^{(1)}/3; \\ S_{\nu 0}^{(1)} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \frac{\partial B_{\nu \psi 0}}{\partial r} = \\ &= -\frac{1}{3(\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)} \left[\frac{\partial B_{\nu \psi 0}}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{\partial B_{\nu \psi 0}}{\partial \psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right]. \end{aligned} \right\} (5.22)$$

Отметим, что спектральная плотность энергии излучения $J_{\nu 0}^{(1)}$ в предельном случае отсутствия рассеяния ($\bar{\sigma}_0 = 0$) равна функции Планка $B_{\nu 0}$. Тот же результат достигается, если просто принять $\psi_0 = 0$. В принципе при интегрировании по частоте $d\nu_0$ можно представить выражение для $J_{\nu 0}^{(1)}$ (и, соответственно, для $K_{\nu 0}^{(1)}$) в форме

$$J_{\nu 0}^{(1)} = B_{\nu 0} - \bar{\sigma}_0 (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)^{-1} B_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0 (\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0)^{-1} B_{\nu \psi 0}$$

и ввести некоторые средние значения для пробегов $(\alpha'_{v0} + \bar{\sigma}_0)^{-1}$, взятых с весовыми функциями B_{v0} и $B_{v\psi0}$. Однако ввиду замечания в конце предыдущего параграфа о том, что поглощение играет заметную роль только при низких частотах, и что в связи с этим вклад членов поглощения в интегральные характеристики излучения незначителен, опустим в этих выражениях член $\alpha'_{v0}/(\alpha'_{v0} + \bar{\sigma}_0)^{-1} (B_{v0} - B_{v\psi0})$, тем более что при этом сохраняется переход к функции Планка при $\psi_0 \rightarrow 0$. Тогда, интегрируя по частоте получившиеся выражения $J_{v0}^{(1)} \approx B_{v\psi0}$, $K_{v0}^{(1)} \approx B_{v\psi0}/3$, получаем для интегральных моментов выражения:

$$J_0^{(1)} \approx B_{\psi0}^* = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_{v\psi0} dv_0 = \\ = aT_0^4 \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{\exp(z - \psi') - 1}; \quad K_0^{(1)} = B_{\psi0}^*/3. \quad (5.23)$$

При вычислении интегральной плотности потока энергии S_0 , однако приходится вводить росселандовы средние пробеги l_R^T , $l_R^{\psi'}$ для обеих весовых функций — $(\partial B_{v\psi0}/\partial T_0)$ и $(\partial B_{v\psi0}/\partial \psi')$. В результате аналогично (5.8), (5.9) получаем:

$$\left. \begin{aligned} S_0^{(1)} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial B_0^*}{\partial T_0} \left[l_R^T \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 l_R^{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] = \\ &= -\frac{4aT_0^3}{3} \left[l_R^T \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 l_R^{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right]; \\ l_R^T &= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_z [1 - \exp(-z)] + \bar{\sigma}_0} \frac{z^4 \exp(z - \psi') dz}{[\exp(z - \psi') - 1]^2}; \\ l_R^{\psi'} &= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_z [1 - \exp(-z)] + \bar{\sigma}_0} \frac{z^3 \exp(z - \psi') dz}{[\exp(z - \psi') - 1]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

В л. с. аналогично (5.11) будем иметь

$$J^{(1)} \approx B_{\psi0}^*; \quad K^{(1)} \approx B_{\psi0}^*/3; \\ S^{(1)} \approx \frac{4}{3} \beta B_{\psi0}^* - \frac{4aT_0^3}{3} \left[l_R^T \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 l_R^{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right]. \quad (5.25)$$

Используя эти выражения во втором уравнении (5.10), получаем аналог уравнения лучистой теплопроводности (5.13) в форме

$$\rho_0 \left(\varepsilon_0 + p_0 + \frac{4}{3} B_{\psi0}^* \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) + \frac{d_1}{d\tau} (\varepsilon_0 + B_{\psi0}^*) = \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{4aT_0^3}{3} \left(l_R^T \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 l_R^{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right]. \quad (5.26)$$

Отметим, что пробеги l_R^T , $l_R^{\psi'}$ не являются средними величинами в строгом смысле этого слова. В самом деле, они должны содержать в знаменателе некоторые нормировочные множители:

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_{\nu\psi_0}}{\partial T_0} d\nu_0 = 4aT_0^3 \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^4 \exp(z - \psi') dz}{[\exp(z - \psi') - 1]^2}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_{\nu\psi_0}}{\partial \psi'} d\nu_0 = 4aT_0^4 \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^3 \exp(z - \psi') dz}{[\exp(z - \psi') - 1]^2}.$$

Эти множители должны были бы фигурировать и в выражениях (5.25). Однако для простоты вычислений мы сохраним выражения (5.24), употребляя для них термин «средний» пробег в условном смысле.

Другие основные уравнения гидродинамики — уравнения непрерывности и Эйлера, выводятся из (5.14)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0}{d\tau} + \frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\beta r^2) &= 0; \\ \rho_0 \frac{d\beta}{d\tau} &= -\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{\partial B_{\psi_0}^*}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Система уравнений (5.26), (5.27) вместе с соотношениями (5.23), (5.24) содержит пять неизвестных функций: ρ_0 , T_0 , $B_{\psi_0}^*$, β , ψ' , поскольку оставшиеся функции ε_0 , p_0 определяются уравнениями состояния, т. е. выражаются через ρ_0 , T_0 и ψ' . В самом деле, как уже говорилось, рассматриваемое вещество представляет собой смесь идеальных газов электронов, атомов и ионов различных видов. Концентрации атомов и ионов могут существенно зависеть от свойств излучения, если велик вклад излучения в процессы ионизации вещества. Поэтому функции ε_0 и p_0 могут зависеть от химического потенциала фотонов ψ' наряду с обычными зависимостями от ρ_0 и T_0 .

Таким образом, формально число неизвестных функций на одну превышает число имеющихся уравнений (5.23), (5.26), (5.27). Соотношения (5.24) просто являются определениями параметров l_R^T , $l_R^{\psi'}$. Чтобы понять, как найти недостающее уравнение, обратимся к полному числу фотонов N_{ψ_0} в единице объема, в выражение для которого входит ψ' . По определению (2.3) с помощью первого приближения для интенсивности излучения (5.20) получаем

$$N_{\psi_0} = N_0^4 = \frac{4\pi}{c} \int_{(\nu_0 l_0)} \frac{I_{\nu_0}}{h\nu_0} d\nu_0 d\bar{l}_0 = \frac{aT_0^4}{kT_0} \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp(z - \psi') - 1}. \quad (5.28)$$

При $\psi' = 0$ в соответствии с (5.15) отсюда находим равновесное планковское значение $N_p = aT_0^4/2,7kT_0$. Ранее мы подчеркивали, что химический потенциал фотонов должен быть отрицательной величиной, т. е. $\psi_0 \leq 0$. При таком условии из (5.28) следует, что плотность фотонов $N_{\psi 0} \leq N_p$. Однако, если начальные условия в рассматриваемой нами среде считать произвольными, то не исключена возможность обратного соотношения $N_{\psi 0} > N_p$. Выходом из указанного противоречия является введение понятия бозе-эйнштейновской конденсации, когда все «лишние» фотоны приобретают нулевую энергию. Для этого к функции $I_{\nu 0}$ следует просто добавить член $\nu_0 \delta(\nu_0)$ с нужным числовым коэффициентом. Согласно определениям (2.7) функций J_0, S_0, K_0 , добавка не изменит перечисленных величин, хотя плотность фотонов при этом может быть произвольной, в том числе и $N_{\psi 0} > N_p$. Ясно, что для определения плотности фотонов $N_{\psi 0}$ можно использовать уравнение непрерывности фотонов (2.14).

§ 28. Уравнение непрерывности фотонов

Уравнение непрерывности фотонов дается формулой (3.7).

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H) &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty d\nu_0 \alpha'_{\nu 0} \frac{B_{\nu 0} - J_{\nu 0}}{h\nu_0} = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \alpha_{\nu 0} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_0}\right) \right] \frac{B_{\nu 0} - J_{\nu 0}}{h\nu_0} d\nu_0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Отметим, что в правой части (5.29) фигурируют только члены, описывающие процессы поглощения фотонов, поскольку при комптоновском рассеянии на электронах число фотонов сохраняется, что можно доказать и непосредственно из факта тождественного обращения в нуль интеграла $\int_{(\nu_0 \bar{l}_0)} d\nu_0 d\bar{l}_0 \nu_0^2 \frac{dF_{\nu 0}}{d\tau_0} \Big|_{\text{ст}} \equiv 0$, где столкновительный член $dF_{\nu 0}/d\tau_0|_{\text{ст}}$ дается формулой (1.42). Ввиду того что правая часть уравнения (5.29) представляет собой релятивистский инвариант, она записана в с. с. Для вычисления ее конкретного вида используем приближение $J_{\nu 0} \approx B_{\nu \psi 0}$, даваемое формулой (5.21). Поскольку имеет место тождественное представление $[1 - \exp(-z)] (B_{\nu 0} - B_{\nu \psi 0}) = [\exp(-\psi') - 1] \times \times [\exp(z - \psi') - 1]^{-1}$, где $z = h\nu_0/kT_0$, то для источника фотонов будем иметь в первом приближении:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty d\nu_0 \alpha'_{\nu 0} \frac{B_{\nu 0} - B_{\nu \psi 0}}{h\nu_0} = \\ &= \frac{aT_0^4}{kT_0} [\exp(-\psi') - 1] \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\alpha_z [\exp(z - \psi')]} . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Заметим, что величина Q_0 всегда положительна, поскольку $\psi' < 0$. Теперь воспользуемся тем фактом, что величины $N = N^4$; $H = N^1$ представляют собой компоненты 4-вектора, определяемого в (2.1), и, следовательно, связаны с компонентами N_0 , H_0 в с. с. общими тензорными связями (1.7), которые в нерелятивистском приближении можно записать следующим образом:

$$N \approx N_0 + \beta H_0, H \approx H_0 + \beta N_0 \approx H_0 + \beta N. \quad (5.31)$$

Подставляя выражение для H из (5.31) в уравнение (5.29) и используя уравнение непрерывности (5.27), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \beta N) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H_0) = \rho_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{N}{\rho_0} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H_0) = Q_0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Для H_0 можно найти в первом приближении выражение, аналогичное (5.15) (для весовой функции $B_{v\psi 0}$):

$$\begin{aligned} H_0^{(1)} \approx -\frac{4\pi}{3c} \left[\frac{\partial T_0}{\partial r} \int_0^\infty \frac{1}{h\nu_0} \left(\frac{\partial B_{v\psi 0}}{\partial T_0} \right) \frac{d\nu_0}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \psi'}{\partial r} \int_0^\infty \frac{1}{h\nu_0} \left(\frac{\partial B_{v\psi 0}}{\partial \psi'} \right) \frac{d\nu_0}{\alpha'_{\nu 0} + \bar{\sigma}_0} \right] = \\ = -\frac{4aT_0^3}{3kT_0} \left[l_{R1}^T \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 l_{R1}^{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

где введены новые условные средние пробеги, аналогичные (5.16), (5.24):

$$\left. \begin{aligned} l_{R1}^T &= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_z [1 - \exp(-z)] + \bar{\sigma}_0} \frac{z^3 \exp(z - \psi') dz}{[\exp(z - \psi') - 1]^2}, \\ l_{R1}^{\psi'} &= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_z [1 - \exp(-z)] + \bar{\sigma}_0} \frac{z^2 \exp(z - \psi') dz}{[\exp(z - \psi') - 1]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Подставляя выражение (5.33) в уравнение (5.32), можно получить уравнение непрерывности фотонов в виде, подходящем для включения в систему уравнений РГД:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{N}{\rho_0} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{4aT_0^3 r^2}{3kT_0} \left(l_{R1}^T \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 l_{R1}^{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) \right] + \\ + \frac{aT_0^4}{[kT_0] \exp(-\psi') - 1} \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{[\alpha_z \exp(z - \psi') - 1]}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

К уравнению непрерывности фотонов (5.35) следует добавить условие бозе-эйнштейновской конденсации: при $N_\psi > N_p$, где $N_\psi = \frac{aT_0^4}{kT_0} \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp(z - \psi') - 1}$; $N_p = aT_0^4/2,7kT_0$, необходимо вместо выражения для N_ψ использовать условие $\psi' = 0$.

Естественно, что для решения полной системы уравнений (5.26), (5.27), (5.28), (5.35) необходимо добавить подходящие уравнения состояния вещества $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho_0, T_0, \psi')$, $p_0 = p_0(\rho_0, T_0, \psi')$. Тогда существование и единственность решения обеспечены при соответствующих начальных и граничных условиях, которые мы здесь не рассматриваем.

Систему уравнений (5.26)—(5.28), (5.35) можно коротко назвать системой уравнений КРГ, поскольку главным новым качественным элементом в данном приближении, отличающем полученную систему от хорошо известной системы с лучистой теплопроводностью, является представление о комптонизации фотонов в процессах рассеяния на электронах.

Некоторые замечания. При решении уравнения непрерывности фотонов (5.35) следует, строго говоря, предусмотреть обрезание интеграла источника фотонов на его нижнем пределе. В самом деле, если в окрестности нулевой энергии $\alpha_{\nu 0} \sim z^\gamma$, где $\gamma \geq 3$, то интеграл в (5.35) становится расходящимся. Указанная расходимость, однако, не имеет физического смысла, так как при этом нарушается исходное предположение теории об установлении в рассматриваемой области бозе-эйнштейновского распределения с $\psi' \neq 0$. Вероятность процессов рассеяния фотонов на электронах определяется при $z \rightarrow 0$ постоянным томсоновским сечением, а вероятность процессов поглощения неограниченно возрастает. На самом деле в области низких частот возникает планковское равновесие излучения с веществом, т. е. $\psi' = 0$, причем верхняя граница этой области z_0 очень грубо определяется из условия (согласно § 27)

$$\bar{\alpha}_{\nu 0} \approx \bar{\sigma}_0'(kT_0/m_e c^2).$$

Нижний предел интеграла источника в (5.35) следует полагать, таким образом, равным z_0 . В отсутствие формальной расходимости интеграла вклад области низких энергий, где нарушаются предположения теории, обычно несуществен, так что можно сохранять нижний нулевой предел интегрирования. Заметим, что необходимость обрезания интегралов может появиться и в соотношениях для средних росселандовых пробегов. Тогда опять следует руководствоваться указанными выше соображениями.

Далее следует отметить еще одну особенность полученной системы уравнений КРГ. Чем больше по абсолютной величине становится химический потенциал фотонов $|\psi'|$, тем меньше отличается бозе-эйнштейновское распределение от виновского.

Поэтому практически допустимо при достаточно больших значениях $|\psi'|$ пренебречь в уравнении (5.35) и всех соотношениях, включающих ψ' , единицей по сравнению с $\exp(z - \psi')$ вплоть до $z = 0$. Тогда помимо некоторого упрощения в интеграле источника фотонов из (5.35) и в выражениях росселандовых средних мы получим вместо интегральных соотношений (5.23), (5.28) следующие

$$\begin{aligned} \exp(\psi') &\approx (\pi^4/30) (kT_0/aT_0^4) N; \\ B_{\psi 0}^* &\approx 3kT_0 N. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Во всех уравнениях КРГ (5.26) — (5.28), (5.35), а также в соотношениях для росселандовых средних с помощью (5.36) можно исключить $B_{\psi 0}^*$ и ψ' . Тогда для описания фотонов в системе уравнений КРГ будет фигурировать лишь одна величина — плотность фотонов N . Такая система уравнений была бы несколько проще системы (5.26) — (5.28), (5.35). Тем не менее ясно, что в случае малых значений $|\psi'|$, т. е. в условиях лучистой теплопроводности, использование виновского приближения, вероятно, необоснованно. Во-первых, появляется заметная ошибка в определении плотности фотонов: $N_p^B|_{\psi'=0} = (30/\pi^4) aT_0^4/kT_0 = = aT_0^4/3,24kT_0 = 0,835 N_p$ и плотности энергии $J_0^B|_{\psi'=0} = = 3kT_0 N_0^B|_{\psi'=0} = 0,926 aT_0^4 = 0,926 J_p$. Во-вторых, и это более существенно, может быть значительная неточность в вычислении интеграла источника фотонов из-за реального увеличения коэффициента поглощения $\alpha_{\nu 0}$ в области низких энергий фотонов (разумеется, выше указанного предела обрезания интеграла z_0). В-третьих, вычисление росселандовых средних также станет некорректным в виновском приближении. Таким образом, для общей системы уравнений КРГ, пригодной при изменении $|\psi'|$ во всей области возможных значений от нуля и до сколь угодно больших значений, использование виновского приближения [38] не имеет особого смысла, поскольку формальные упрощения незначительны, а ошибки в области значений $|\psi'| \sim 0$ заметны.

Заключение

Выведенные и проанализированные в настоящей книге уравнения РРГД позволили решить некоторые интересные задачи, связанные с учетом релятивистских эффектов взаимодействия излучения с веществом. Принципиально важная задача для высокотемпературных явлений — задача о структуре ударной волны с излучением — рассмотрена в работах многих авторов. Тем не менее на основе применения уравнений РРГД, полученных выше, удалось уточнить многие свойства структуры ударной волны: точные значения параметров перехода от непрерывной структуры к разрывной со скачком, положение скачка в структуре и изменения в структуре термодинамических, гидроди-

намических и радиационных величин [9, 10, 17, 39]. Другой важной задачей, связанной с уравнениями РРГД, можно назвать известную задачу о гравитационном коллапсе звезды с учетом потерь энергии в виде нейтринного излучения. На определенной стадии коллапса звезда становится непрозрачной для собственного нейтринного излучения, и тогда возникает задача о динамике коллапса, на которую существенно влияет взаимодействие нейтрино и антинейтрино с веществом. В работе [40] для исследования этой динамики сформулирована полная система уравнений нейтринной газодинамики в диффузионном приближении, являющаяся непосредственным обобщением результатов второй главы настоящей книги. В последующих работах [43—45] численно решалась задача о динамике коллапса на основе уравнений из [40]. Эти расчеты показали динамический процесс образования нейтронной звезды и дали характеристики возникающего при этом нейтринного излучения. В более поздней работе [42] приняты во внимание эффекты рассеяния нейтрино и антинейтрино, уравнения нейтринной газодинамики записаны с учетом этих эффектов, что распространяет результаты пятой главы на случай нейтринного излучения.

В работах [46, 47] уравнения РРГД, совпадающие с нашими, применены для исследования взаимного преобразования акустических и тепловых волн в средах с высоким лучистым давлением, что, в частности, было применено к изучению выхода волн в атмосферах аккреционных дисков вокруг черных дыр и сверхмассивных звезд. В [41] на основе уравнений КРГ численно исследован вопрос об отклонении от условий ЛТР в модели вспышек сверхновых звезд.

Ввиду важности расширения областей применимости уравнений РРГД в работах [14, 15, 48] они получены в общековариантной форме для произвольной метрики пространства—времени ОТО, а для асимптотически инерциальной системы отсчета приведены к виду, максимально соответствующему тому, который используется в СТО.

Круг вопросов, в которых необходим учет релятивистских эффектов взаимодействия излучения с веществом, все более расширяется, и мы надеемся, что настоящая книга будет полезна в исследовании возникающих проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomas L. H. — Quart. J. Math., 1930, v. 1, p. 239.
2. Синдж Дж. Л. Релятивистский газ. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1960.
3. Hazlehurst J., Sargent W. L. W. — Astrophys. J., 1959, v. 130, N 1, p. 276.
4. Прокофьев В. А. — Докл. АН СССР, 1961, т. 140, с. 1033.
5. Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. Пер. с англ. М., Мир, 1969.
6. Anderson J. L., Spiegel E. A. — Astrophys. J., 1972, v. 171, N 1, p. 127.
7. Lindquist R. — Ann. Phys., 1966, v. 37, N 3, p. 487.
8. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. — Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1966, N 4, с. 3.
9. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. — Там же, 1964, № 2, с. 8.
10. Морозов Ю. И. — Там же, 1966, № 4, с. 42.
11. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. — Астрон. журн., 1969, т. 46, № 4, с. 800.
12. Морозов Ю. И. — Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1970, № 1, с. 3.
13. Морозов Ю. И. Препринт ИПМ № 20. М., 1971, Астрон. журн., 1972, т. 49, № 5, с. 954.
14. Морозов Ю. И. Препринт ИПМ № 83, М., 1974.
15. Морозов Ю. И. Препринт ИПМ № 96. М., 1974.
16. Морозов Ю. И. Препринт ИПМ № 25. М., 1975.
17. Имшенник В. С. — Физика плазмы, 1975, т. 1, № 2, с. 202.
18. Имшенник В. С. Препринт ИПМ № 86. М., 1976.
19. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
20. Паули В. Теория относительности. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1948.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.
22. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца. Минск, Наука и техника, 1969.
23. Синг Дж. Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
24. Chiu H.—Y. Stellar Physics. V. 1. Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass., 1968.
25. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
26. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
27. Меллер К. Теория относительности. Пер. с нем. М., Атомиздат, 1975.
28. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.
29. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
30. Франк-Каменецкий Д. А. Физические процессы внутри звезд. М., Физматгиз, 1959.
31. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

32. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика, М., Гостехиздат, 1952.
33. Ферми Э. Научные труды. Т. 1. Пер. с англ. М., Наука, 1971.
34. Эйзенхарт Л. Риманова геометрия. Пер. с англ. М., Изд-во инсстр. лит., 1948.
35. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, М., Наука, 1964.
37. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика, М., Наука, 1967.
38. Weaver T. A., Chapline G. F. — *Astrophys. J.*, 1974, v. 192, p. 57.
39. Морозов Ю. И. Препринт ИПМ № 66, М., 1971.
40. Имшенник В. С., Надежин Д. К. Препринт ИПМ № 18, М., 1971.
41. Имшенник В. С., Утробин В. П. — *Письма в Астрон. ж.*, 1977, т. 3, № 2, с. 68.
42. Имшенник В. С., Надежин Д. К. Препринт ИПМ № 72. М., 1978.
43. Надежин Д. К. — *Astrophys. Space Sci.*, 1977, v. 49, p. 399.
44. Надежин Д. К. — *Ibid.*, 1977, v. 51, p. 283.
45. Надежин Д. К. — *Ibid.*, 1978, v. 53, p. 131.
46. Бисноватый-Коган Г. С., Блинников С. И. — *Астрофизика*, 1978, т. 14, вып. 4, с. 563.
47. Бисноватый-Коган Г. С., Блинников С. И. — Там же, 1979, т. 15, вып. 1, с. 165.
48. Морозов Ю. И. Препринт ИПМ АН СССР, № 142, М., 1978.
49. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. — *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1963, № 3, с. 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Релятивистское уравнение Больцмана	5
§ 1. Общие преобразования Лоренца	6
§ 2. Фазовое пространство	9
§ 3. Функция распределения частиц	13
§ 4. Релятивистское уравнение Больцмана	14
§ 5. Столкновительные члены	16
Глава 2. Релятивистские уравнения радиационной газодинамики. Тензор энергии — импульса излучения. Лучистая теплопроводность и вязкость излучения.	20
§ 6. Уравнения моментов функции распределения	21
§ 7. Уравнения радиационной релятивистской газодинамики (РРГД)	23
§ 8. Тензор энергии — импульса излучения при условиях, близких к равновесным, в собственной системе отсчета (с. с.)	26
§ 9. Тензор энергии — импульса излучения при условиях, близких к равновесным, в лабораторной системе отсчета (л. с.)	29
§ 10. Вязкость излучения. Одномерный случай	32
Глава 3. Эффекты взаимодействия излучения с веществом в уравнениях РРГД. Томсоновское и комптоновское рассеяние фотонов электронами вещества	35
§ 11. Рассеяние фотонов на электронах вещества	36
§ 12. Учет эффектов томсоновского рассеяния в уравнениях РРГД (с. с.)	38
§ 13. Эффекты томсоновского рассеяния фотонов в л. с.	41
§ 14. Учет эффектов комптоновского рассеяния в уравнениях РРГД. Исходные соотношения	45
§ 15. Учет эффектов комптоновского рассеяния в уравнениях РРГД. Вычисление компонент вектора обмена энергией—импульсом излучения с веществом	48
§ 16. Условия замыкания уравнений РРГД. Галилеевское приближение	52
Глава 4. Уравнения переноса излучения в неинерциальных системах отсчета	55
§ 17. Определение сопутствующей системы отсчета. Введение подвижного репера. Перенос репера вдоль мировой линии	55
§ 18. Определение пространства синхронизации.	57

§ 19. Формулы связи между компонентами 4-ускорения в различных системах. Обобщение определения сопутствующей системы.	58
§ 20. Получение уравнений моментов в сопутствующей системе отсчета на основе уравнения Больцмана .	61
§ 21. Вывод уравнений моментов из уравнения переноса излучения	63
§ 22. Компоненты тензора энергии — импульса излучения в условиях, близких к ЛТР при учете комптоновского рассеяния	66
§ 23. Уравнения газодинамики в сопутствующей системе отсчета	67
Глава 5. Диффузионные приближения в радиационной газодинамике (РГД). Лучистая теплопроводность и комптоновская радиационная газодинамика (КРГ) . . .	69
§ 24. Диффузионное приближение. Метод Энскога	
§ 25. Приближение лучистой теплопроводности . . .	70
§ 26. Обоснование приближения полной комптонизации фотонов	72
§ 27. Основные уравнения комптоновской радиационной газодинамики (КРГ)	75
§ 28. Уравнение непрерывности фотонов	77
Заключение	80
Список литературы	83
	85

Владимир Сергеевич Имшенник, Юрий Иванович Морозов

РАДИАЦИОННАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Редакторы: *Н. Г. Саакян, В. Н. Безрукова*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Обложка художника *Ю. С. Шлепера*
Технические редакторы: *Н. А. Власова, А. А. Белоус*
Корректор *Н. А. Смирнова*

ИБ № 775

Сдано в набор 04.08.80. Подписано в печать 06.02.81. Т-01051.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая
Усл. печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 5,94. Тираж 1065 экз. Зак. изд. 76138
Зак. тип. 2042 Цена 90 к.
Атомиздат, 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
129041 Москва, Б. Переяславская, 46

